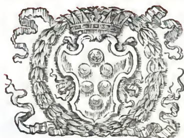
DE MAXIMIS,
ET
MINIMIS
GEOMETRICA DIVINATIO
IN QVINTVM CONICORVM
APOLLONII PERGÆI
IAMDIV DESIDERATVM.

AD SERENISSIMVM
PRINCIPEM LEOPOLDVM
AB ETRVRIA.

LIBER SECVNDVS.

AVCTORE
VINCENTIO VIVIANI.





FLORENTIÆ MDCLIX.

Apud Ioſeph Cocchini, Typis Nouis, ſub Signo STELLÆ.
SVPERIORVM PERMISSV.



SERENISSIMO

PRINCIPI LEOPOLDO

AB ETRVRIA.



BSVRDVM, aut insolens minimè quidem est SERENISSIME PRINCEPS, non tantùm aliena largiri, verùm etiam muneris nomine animo libenti propria suscipere. Quid enim vnquam Deo Opt. Max. mortales offerre posset, nisi suis quoque hostijs diuina benignitas oblectaretur? Quid ego Celsitudini tuæ, cuius patrocinio omnia debeo, nisi quę tua sunt tibi reddi magnanimè patereris? Ab impudentiæ nota me liberas, & frontem meam rubori subtrahis SERENISS. LEOPOLDE. Fidentiùs enim mentis meæ tenuissimos partus tibi nunc exhibere audeo, Regia namq; manu obstetrice, è tenebris in quibus delitescebant in lucem eductos, quos nuper vt proprios despiciebam, modò à perspicacissimo iudicio tuo in clientelam, atque, vt ita dicam, in liberorum locum humanissimè susceptos nonnihil æstimare cogor. Quid ergo lucubrationes hasce meas, quæ tuæ iam sunt, tibi ampliùs commendem? Quod te iubente lucem aspicerent, tuæ magnanimitatis beneficium fuit; quod tutæ à malo-

rum

rum inuidia te propugnante per Geometrarum eruditas manus incedant, tui in literas amoris beneficium erit. Hæc me alioquin, & iure, formidolosum bono esse animo efficaciter suadent. Et verè, si mihi Genethliacorum more diuinare liceret, non infelix futurum DIVINATIONIS meę fatum sperarem, quam nascentem fulgidissima lumina, Iuppiter, atque Apollo Etruriæ tam benignè aspexerunt. Hoc si vnquam videre dabitur, tuis auspicijs SERENISSIME PRINCEPS, non modò ingenium ad maiores conatus, sed & diu iacentē fortunam meam aliquando se se erecturam confido. Faxit Deus: qui (vt enixè precor) te, literarum præsidium, & decus seruet incolumem, & Heroicæ virtutis tuæ incœptis faueat.

Florentiæ Tertio Cal. Ian. 1658.

SER.^MÆ CELS.^NIS TVÆ

Humillimus, Obsequentiss. Obstrictiss. Seruus

Vincentius Viuiani.

VINCENTII VIVIANI
DE MAXIMIS, ET MINIMIS
Geometrica diuinatio in V. conic. Apoll. Pergæi.

LIBER SECVNDVS.

LEMMA I. PROP. I.

Si recta linea vtcunque secta fuerit: quadratum totius æquabitur quadrato vnius partis, vnà cum rectangulo sub tota, & dicta parte, tanquam ab vna linea, & sub altera parte contento.



STO data recta A B vtcunque secta in C. Dico quadratum A B æquale esse quadrato alterius partis, nempe A C, vna cum rectangulo sub B A cum A C, tanquam vna linea, & sub reliqua parte B C comprehenso. Nam producta B A sumatur A D æqualis ipsi BC. Quoniam igitur D C est bifariam secta in A, ipsique adiecta C B, erit quadratum A B æquale rectangulo sub D B, BC, vnà cum quadrato C A; sed DB linea conficitur ex D A cum A B, vel ex A C cum A B; ergo quadratum totius A B æquatur quadrato partis C A, vna cum rectangulo sub B A cum A C, tanquam vna linea, & sub reliqua parte B C comprehenso. Quod erat, &c.



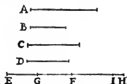
LEMMA II. PROP. II.

Si quatuor quantitatum eiusdem generis, prima superet secundam maiori excessu, quo tertia superat quartam, aggregatum extremarum maius erit aggregato mediarum.

Sint quatuor quantitates eiusdem generis A, B, C, D, & prima A superet secundam B, maiori excessu, quo tertia C superat quartam D. Dico aggregatum extremarum A, D maius esse aggregato mediarum B, C.

 Nam

Nam intelligatur magnitudo EF æqualis primæ A, FG verò æqualis secundę B; atque ipsis in directum magnitudo FH æqualis tertiæ C, & FI quartæ D. Erit excessus magnitudinis EF supra FG, hoc est EG, maior excessu quantitatis HF supra FI, siue maior ipso HI, ex suppositione, quibus addita communi quantitate GI, prouenict EI maior GH, siue aggregatum ex EF, & FI, nempe extremarum A, & D, maius aggregato ex GF, & FH, vel ex medijs B, & C. Quod erat, &c.

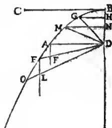


THEOR. I. PROP. III.

MINIMA linearum in Parabola ducibilium ad eius peripheriam à puncto axis intra sectionem sumpto, quod distet à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris, est ipsum axis segmentum inter punctum, & verticem interceptum. Aliarum verò ea, quæ cum MINIMA minorem constituit angulum, minor est.

ESto Parabole AB, cuius segmentum axis BD non excedat dimidium recti lateris BC datæ Parabolæ. Dico DB esse *MINIMAM* ducibilium ex eodem puncto D ad Parabolæ peripheriam AB, &c.

Applicetur axi ex D, recta DA. Erit quadratum AD [a] æquale rectangulo sub DB, & recto BC; sed rectangulum DBC maius est quadrato DB (cum latus rectum BC positum sit, vel duplum, vel magis quàm duplum ipsius BD) igitur quadratum AD maius erit quadrato DB, siue linea DA maior DB.



[a] Coroll. primę primi huius.

Rursus ducatur infra DA ex D quęcunque alia DE ad peripheriam, & ex A recta AF parallela ad BD, quæ tota ad partes F [b] cadet intra Parabolen; nec ei ad aliud punctum occurret quàm ad A; ideoque secabit eductam DE, vt in F, eritque ED maior DF, sed est DF maior DA (cum in triangulo DAF angulus ad A sit rectus, siue maior acuto ad F) & DA maior ipsa DB, vt supra ostendimus, quare DE multò maior erit ipsa DB.

[b] 26. primi conic.

Ampliùs sit quæcunque DG ducta ex D supra DA, & ex G applicetur GH. Cumque latus rectum BC sit maius aggregato BD cum DH (positum enim fuit BC non maius quàm duplum segmenti BD, estque

BD

B D maior DH) erit rectangulum sub recto C B in segmentum B H siue,[a] quadratum GH, maius rectangulo sub aggregato BD cum DH, in idem segmentum BH, quibus addito communi quadrato DH, erit quadratum GH cum HD quadrato, siue vnicum quadratum GD, maius rectangulo sub aggregato B D cum DH in B H, vnà cum quadrato DH, siue[b] maius vnico quadrato BD, hoc est linea D G maior erit DB. Est ergo DB *MINIMA* ducibilium ad Parabolæ peripheriam ex axis puncto D, quod abest à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris B C. Quod primò demonstrandum erat.

a Coroll. primæ primi huius.

b 1. h.

Præterea sit quæpiam alia D M maiorem efficiens angulum cum *MINIMA* DB, quàm D G, & ex M applicetur MN. Iam quadratum MN superat quadratum GH eo excessu, quo rectangulum CBN superat rectangulum CBH, (ob[c] æqualitatem) hoc est rectangulo sub recto CB in HN, sed quadratum DH[d] superat quadratum DN rectangulo sub eadem HN, & sub aggregato HD cum DN, quod aggregatum, ex hypotesi, minus est ipso recto BC, ergo excessus quadrati MN supra quadratum GH, maior est excessu quadrati HD supra DN, vnde aggregatum extremorum quadratorum MN, ND, siue vnicum quadratum MD, maius erit[e] aggregato quadratorum mediorum GH, HD, siue vnico quadrato GD, hoc est linea DM maior DG.

c Coroll. primæ primi huius.

d 1. h.

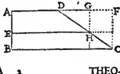
e 2. h.

Vlteriùs, quadratum AD superat quadratum MN rectangulo sub DN, & recto BC, & quadratum DM, superat idem quadratum MN quadrato DN, quod est minus prædicto rectangulo sub DN, & recto CB, quare excessus quadrati AD supra MN, maior est excessu quadrati DM, supra idem quadratum MN; quapropter AD quadratum maius est quadrato DM, siue linea AD maior ipsa DM.

Tandem ducta quacunque DO infra DE, agatur ex E recta EL æquidistans ad BD. Cum angulus BDE sit obtusus, erit quoque parallelarum alternus DEL obtusus, ideoque in triangulo DEL angulus DLE acutus, siue minor angulo DEL: quare latus DE minus latere DL, & eò minus educta DO. Vnde quæ minorem cum *MINIMA* constituit angulum minor est, &c. Quod omnino ostendere propositum fuit.

LEMMA III. PROP. IV.

Si inter latera parallela AD, BC, mensalis ABCD rectangulę ad B, ducta fuerit quædam linea EH ipsis lateribus æquidistans, sitq; AD minor BC. Dico rectangulum ABC, superare rectangulum AEH maiori excessu, quàm sit rectangulum EBC.



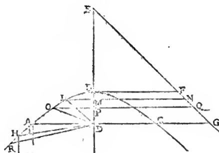
Completis enim rectãgulis EG, BF, EC; patet rectangulum ABC superare rectangulum AEH gnomone ECG, sed gnomon ECG maior est rectangulo EBC, vnde rectangulum ABC, superat rectangulum AEH maiori quantitate quàm sit rectãgulum EBC. Quod erat, &c.

THEOR. II. PROP. V.

MINIMA linearum in Hyperbola ducibilium ad ipsius peripheriam à puncto axis intra sectionem sumpto, quod distet à vertice per interuallum, non maius quàm dimidium recti lateris, est idem axis segmentum inter punctum, & verticem interceptum. Aliarum autem, quæ cum MINIMA minorem constituit angulum minor est.

Esto Hyperbole ABC, cuius segmentum axis BD non excedat dimidium recti lateris BF (quod axi ordinatim applicetur, &c.) Dico DB esse *MINIMAM* ducibilium ex ipso puncto D ad Hyperbolæ peripheriam ABC, &c.

Sumatur in directum axi, transuersum latus BE, iungaturque regula EF, & producatur; appliceturque per D ordinata ADC, regulæ occurrens in G.



Iam, cum in triangulo EDG, sit DG maior BF, & BF maior segmento BD (ex hypotesi) erit DG eò maior ipso segmento DB, quare rectangulum GDB, a siue quadratum AD, maius erit quadrato DB; hoc est linea DA maior ipsa DB.

a Coroll. primę pri- mi huius.

Eodem modò, ac in Parabola, ostendetur DA minorem esse quacunque educta DH infra DA, & DH adhuc minor DR, &c.

Nunc verò sit quælibet DL ducta ex D supra DA, & per L applicetur LM, quę producatur, donec regulæ EF occurrat in N. Erit in triangulo EDG, recta MN maior BF, sed BF maior est aggregato BD cum

DM

DM (cum latus rectum BF, vel duplum sit, vel plus quàm duplum ad BD) ergo MN ipso aggregato BD cum DM adhuc maior erit, vnde rectangulum sub NM in MB, [a] siue quadratum LM, maius erit rectangulo sub aggregato BD cum DM, in eadem MB, quibus communi addito quadrato MD, erit quadratum LM cum MD, siue vnicum quadratum DL, maius rectangulo sub BD cum DM in MB, vnà cum quadrato DM, siue maius vnico quadrato DB, quod prædicto [b] rectãgulo æquale est, siue linea DL maior DB. Quare segmentum axis DB, non excedens dimidium recti lateris BF, est *MINIMA* linearum ducibilium ex D ad Hyperbolæ peripheriam. Quod primò ostendere oportebat.

[a] Coroll. primæ primi huius.

[b] 3. huius.

Præterea, quadratum AD superat quadratum LM, eo excessu quo rectangulum BDG superat rectangulum BMN, (sunt [c] enim singula singulis æqualia) sed excessus rectanguli BDG supra rectangulum BMN maior est [d] rectangulo MDG, ergo quadratum AD superat quadratum LM maiori rectangulo quàm MDG; sed quadratum DL superat idem quadratum LM quadrato DM, quod minus est rectangulo MDG (nam est DG maior DM, cum superius demonstrata sit maior ipsa DB) ergo quadratum DA maius est quadrato DL, siue linea DA maior quacunque DL, intercepta inter applicatam DA, & axem DB.

[c] Coroll. primæ primi huius.

[d] 4. huius.

Amplius, ducatur alia quæpiam DO supra DA, sed remotior à segmento DB quàm DL, applicataque OP, producatur donec regulatrici EF occurrat in Q. Erit excessus quadrati OP supra quadratum LM, idem ac excessus rectanguli BPQ supra BMN (nam [e] sunt rectangula quadratis æqualia, vtrumque vtrique) sed excessus rectanguli BPQ supra BMN maior [f] est rectangulo MPQ, ergo excessus quadrati OP, supra quadratum LM, maior est rectangulo sub MP, & PQ; at excessus quadrati MD supra quadratum DP, minor est prædicto rectangulo (nam quadratum MD [g] superat quadratum DP, rectangulo sub MD cum DP in MP, quod est minus rectangulo sub QP in eadem MP, quoniam MD cum DP minor est recto latere BF, & eò minor ipsa QP, quę maior est BF) quare excessus quadrati OP supra LM, maior est excessu quadrati MD supra DP; duo igitur extrema simul quadrata OP, PD, siue vnicum quadratum DO, maius est duobus simul quadratis medijs LM, MD, hoc est vnico quadrato DL, siue linea DO maior est linea DL. Vnde quæ minorem efficit angulum cum *MINIMA* DB, minor est, &c. Quod fuit vltimò demonstrandum.

[e] Coroll. primæ primi huius.

[f] 4. huius.

[g] 1. huius.

* a. huius.

* * *
* *
*

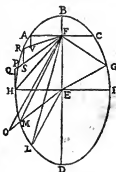
THEO-

THEOR. III. PROP. VI.

MAXIMA linearum ad vniuersam Ellipsis peripheriam ducibilium, à puncto maioris axis, quod non sit centrum, ea est, in qua centrum. Et eductarum ad peripheriam maioris Ellipticæ portionis, cuius basis, sit recta ad axim ordinatim ducta, ex prędicto puncto; quę cum MAXIMA minorem constituit angulum, maior est. MINIMA verò in eadem portione, est ipsa semi-applicata.

ESto Ellipsis ABCD, cuius axis maior BD, minor HI, centrum E, & quodlibet aliud punctum in maiori axe sit F. Dico *MAXIMAM* ducibilium ab F ad vniuersam Ellipsis peripheriam esse FD, in qua centrum.

Nam, quod DF sit maior reliqua FB patet, cum FD, maior sit axis dimidio, FB verò minor.



Iam, ad quodcunque Ellipticæ peripheriæ punctum G, sit quædam educta FG, & iungatur EG. Itaque cum semi-axis maior ED, sit [a] *MAXIMA* semi-diametrorum, ipsa maior erit EG, quibus communi addita EF, erit tota DF maior duobus GE, EF, & eò maior vnica FG. Quare FD est ad vniuersam peripheriam ducibilium *MAXIMA*.

a 86. primi huius.

Insuper applicetur ex F axi ordinata AFC, & ad peripheriam eiusdem quadrantis HDE, ductæ sint ex F duę quęlibet FL, FM, & FL minorem, FM verò maiorem angulum efficiat cum *MAXIMA* FD. Dico FL maiorem esse FM. Iunctis enim EL, EM; erit [b] EL maior EM, quæ producatur, & fiat EO æqualis EL, & iungatur FO: erunt igitur duo latera FE, EL, duobus FE, EO æqualia, alterum alteri, sed angulus FEL maior est angulo FEO, ergo basis FL, maior est FO, sed FO maior est FM, (cum in triangulo FMO angulus ad M obtusus sit, eò quod sit maior obtuso FEM) quare FL eò maior erit ipsa FM, quę cum *MAXIMA* maiorem efficit angulum: simili modo ostendetur FM maiorem esse educta FH.

b ibidem.

De eductis verò ad portionem peripheriæ HA, ita ratiocinabimur. Sit enim qualibet FP, & per H sit Ellipsim contingens HQ, quæ cum æquidistet axi BFD, secabit omnino productam FP extra Ellipsim in Q; eritque in triangulo FQH, latus FH maius latere FQ (cum angulus

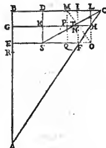
FQH

FQH sit obtusus, eò quod alterno QFB obtuso sit æqualis) sed est FQ maius FP, quare educta FH eò maior erit educta FP. Amplius ducta qualibet alia FR, adhuc maiorem angulum faciens cum *MAXIMA* FD, agatur per R recta RS axi FE parallela, quæ cadet intra Ellipsim, (cum sit ad minorem axim HI ordinatim ducta) secabitque FP in S, ac in triangulo FRS obtusiangulo ad R, erit latus FS maius latere FR, & educta FP eò maior educta FR; eademque ratione ostendetur quamlibet eductarum ad peripheriam HA, vtputa FR, maiorem esse semi-applicata FA, si ex A ducatur AV parallela ad EF, &c. quare eadem semi-applicata FA omnium eductarum in portione maiori ADC erit *MINIMA*. Aliarum autem, quæ cum *MAXIMA* FD maiorem angulum constituit, maior est. Quod omnino ostendere opus fuerat.

LEMMA IV. PROP. VII.

Si in triangulo ABC, cuius rectus angulus sit ad B, fuerit latus AB maius altero BC, sitque de maiori BA abscissa pars BE, quæ non excedat dimidium ipsius BC, & ex quolibet eius puncto G ducta sit GH parallela ad BC. Dico primùm ipsam GH semper maiorem esse aggregato BE cum EG. I.

Ducatur EF æquidistans ad BC. Et quoniam AB ponitur maior ipsa BC; BC verò dupla, vel plus quàm dupla ad BE, erit omnino AB plus quàm dupla ad BE, siue AE plus quàm dimidium ipsius AB, quod memento: sed, vt AE ad AB, ita EF ad BC; quare EF est maior dimidio ipsius BC, hoc est maior ipsa BE. Secta igitur ES æquali ipsi BE, ducatur SK D parallela ad BE, eritque BS parallelogrammum æquilaterum (cum EB, ES sint æquales) iungatur denique CS rectam GH secans in T.



Itaque cum EB, siue BD posita sit æqualis, vel minor dimidio ipsius BC, erit CD æqualis, vel maior ipsa DB, vel DS. Cumque sit, vt CD ad DS, ita TK ad KS, erit quoque TK æqualis, vel maior ipsa KS, siue GE, quibus TK, & GE additis æqualibus KG, EB, proueniet tota TG æqualis, vel maior aggregato GE cum EB, sed est HG maior ipsa TG: quare HG erit omnino maior aggregato BE cum EG. Quod, &c.

Præterea

2, Præterea, ijſdem poſitis in eadem figura. Dico rectangulum BEF ſuperare rectangulum BGH maiori exceſſu quàm ſit quadratum GE.

COmpletis enim rectangulis BEFI, BGHL, productiſque EF, LH vſque ad occurſum in O; cum ſit AE pluſquàm dimidium ipſius AB, vt ſupra oſtendimus, erit AE maior EB; cumque ſit BA ad AE, ita BC ad EF, vel ad BI, erit diuidendo BE ad EA, vt CI ad IB, ſed eſt BE minor ipſa EA, ergo, & CI minor erit ipſa IB, quare ſumpta LM æquali ipſi CI punctum M non pertinget ad B.

Iam cum ML, IC ſint æquales, erit ML ad NH, vt IC ad NH, vel vt IF ad FN, vel vt LO ad OH, quare puncta M, N, O erunt in vna, eademque recta MNO. Poſtremò ducatur recta MPQ parallela ad BE. Erunt in rectangulo QL ſupplementa QN, LN inter ſe æqualia, quibus addito communi rectangulo BN, fiet gnomon GIQ æqualis rectangulo BH, ſed exceſſus rectanguli BF ſupra gnomonem GIQ, eſt rectangulum GQ, quare exceſſus quoque rectanguli BF, ſupra BH, erit idem rectangulum GQ. Cumque ſit CB minor BA, & vt CB ad BA, ita CL ad LH, erit quoque CL, vel MI, vel QF minor LH, vel BG; eſtque tota EF, maior tota EB, vt ſuperiùs oſtendimus, ergo reliqua QE maior erit reliqua EG, vnde rectangulum GEQ, quod eſt exceſſus rectanguli BEF ſupra BGH maius erit quadrato GE. Quod, &c.

3. Poſtremò ijſdem poſitis, & constructis, concipiatur quoque alia BR maior quidem BE, ſed minor adhuc dimidio ipſius BA, & non maior dimidio ipſius BC. Dico tandem exceſſum rectanguli BEF ſupra rectangulum BGH, quod eſt GEQ, maius eſſe exceſſu quadrati GR ſupra RE.

NAm, vt primo loco ſuperiùs demonſtrauimus, erit tota linea EF maior aggregato BR, cum RE, ſed pars QF minor eſt parte BG prædicti aggregati (nam eſt QF æqualis MI, ſiue LC, & BG æqualis eſt LH, eſtque CL minor LH, cum ſit data CB minor quoque BA) ergo reliqua EQ maior erit reliquo eiuſdem aggregati, quod eſt GR cum RE; vnde rectangulum ſub QE, & EG, quod eſt exceſſus rectanguli BEF ſupra BGH, maius erit rectangulo ſub GE cum RE, in eadem GE: ſed rectangulum ſub GR cum RE, in GE, a eſt exceſſus quadrati GR ſupra RE, ideoque rectangulum BEF ſuperat rectangulum BGH maiori exceſſu, quo quadratum GR ſuperat quadratum RE. Quod tandem, &c.

a 1. huius.

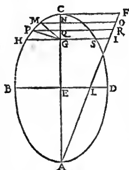
THEO-

THEOR. IV. PROP. VIII.

MINIMA linearum ad vniuersam Ellipsis peripheriam ducibilium, à puncto maioris axis, quod distet à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris, est idem axis segmentum, inter datum punctum, & verticem interceptum.

Aliarum autem eductarum in minori portione Ellipsis, cuius basis, sit applicata per datum punctum; quæ cum MINIMA minorem angulum constituit, minor est.

ESto Ellipsis ABCD, cuius axis maior AC, minor BD, centrum E, & latus rectum maioris axis CA sit CF, & regula AF: segmentum verò CG, sit non maius dimidio CF. Dico primùm GC esse *MINIMAM* ducibilium ex G ad vniuersam Ellipsis peripheriam ABCD.



Quod enim GC, licet ponatur æqualis dimidio recti CE, sit minor reliquo axis segmento GA, patet: quoniam CA ad BD, est vt BD ad CF, & sumptis subduplis, CE ad EB, vt EB ad CG, estque CE maior EB, quare EB quoque maior est CG, & eò magis AE, immò AG maior GC.

Iam applicetur per G recta HGS, regulæ occurrens in I. Erit AE ad ad AC, vt EL ad CF, sed est AE dimidia AC, quare EL recti CF dimidia erit; estque GI maior EL, ergo GI maior est dimidio recti CF, & posita est GC non maior dimidio recti; ergo GC erit omnino minor GI, siue quadratum GC minus rectangulo CGI, siue [a] quadrato GH, hoc est linea GC minor ipsa GH, sed GH est [b] *MINIMA* ducibilium ex G ad peripheriam HAS, ergo GC eò ampliùs *MINIMA* erit ad eandem maioris portionis peripheriam HAS.

[a] Coroll. primę primi huius.
[b] 6. h.

Ampliùs, ad peripheriam minoris portionis HCS ducatur quęcunque GM, & per M applicetur MNO. Cum in triangulo rectangulo ACF ostensa sit CG minor quàm dimidium CA, sed posita sit non maior dimidio CF, & ex puncto N in CG sumpto, ducta sit NO parallela ad CF, erit NO maior aggregato CG cum GN, per primam partem 7. huius; ergo sumpta communi altitudine NC, erit rectangulum ONC, siue quadratum [c] MN maius rectangulo sub CG cum GN in NC: addito communi quadrato GN, erit quadratum MN cum quadrato NG, siue vnicum quadratum GM, maius rectangulo sub CG cum GN in NC, vnà

[c] Coroll. primę primi huius.

quadrato GN sed rectangulum C G cum G N, in N C, vnà cum quadrato GN, a conficit quadratum vnicæ CG, ergo quadratum GM maius est quadrato GC, siue linea GM maior GC: ex quò GC erit etiam *MINIMA* ductarum ex G ad peripheriam minoris portionis HCS. Vnde ipsa GC erit *MINIMA* ad totam peripheriam ABCD.

a 1. h.

Insuper rectangulum CGI superat rectangulum CNO spatio minori, quàm sit quadratum N G, per secundam partem 7. huius; quare (alijs sumptis b æqualibus) quadratum GH superabit quadratum MN maiori excessu quadrati GN; sed quadratum GM superat idem quadratum MN quadrato tantùm GN, ergo excessus quadrati GH supra NM, maior est excessu quadrati GM supra idem quadratum MN, quare quadratum GH maius est quadrato GM, siue linea GH maior GM.

b Coroll. primę primi huius.

Tandem ducatur GP minorem cõstituens angulum cum *MINIMA* GC quàm GM, applicetur que PQR. Erit excessus rectanguli CQR supra CNO maior excessu quadrati NG supra GQ, per tertiam partem 7. huius, ergo (permutatis æqualibus, c &c.) quadratum PQ superabit quadratum MN maiori excessu, quàm quadrati NG supra GQ: vnde aggregatum extremorum quadratorum PQ, GQ, siue vnicum quadratum GP, maius erit d aggregato mediorum MN, NG, siue vnico quadrato GM; hoc est linea GP erit maior linea GM. Quapropter linearum ex G ducibilium ad minoris portionis peripheriam HCS, quæ minorem angulum constituit cum *MINIMA* minor est. Quod erat vltimò demonstrandum.

c ibidem.

d 2. h.

Verùm prætermissa hac methodo mihi, vt fateor, molestiori, quod in quatuor præcedentibus theorematibus, quò ad MAXIMAS tantùm, & MINIMAS attinet, hic simul, & aliquid vltra, aliter, & expeditiùs demonstrabitur.



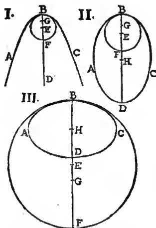
THEO-

THEOR. V. PROP. IX.

MINIMA linearum, ad peripheriam cuiuslibet coni-sectionis ducibilium à puncto axis (quod in Ellipsi sit axis maior) distans à vertice per interuallum non maius dimidio recti lateris, est idem axis segmentum inter assignatum punctum, & verticem interceptum. At in Ellipsi tantùm, MAXIMA est reliquum maioris axis segmentum, in quo centrum reperitur.

In Ellipsi verò circa minorem axim; MAXIMA ducibilium à puncto eiusdem axis, quod distet à vertice per interuallum non minus dimidio recti, est ipsum axis segmentum, inter assumptum punctum, & verticem interceptum. MINIMA verò est reliquum minoris axis segmentum, in quo centrum non reperitur.

1. ESto ABC quæcunque coni-sectio, vel Parabole, vel Hyperbole, vt in prima figura, vel Ellipsis, vt in secunda, circa maiorem axim BD, in quo sumptum sit punctum E, quod primò distet à vertice B per interuallum æquale dimidio recti lateris axis BD, quodq; in Ellipsi omnino minus erit semi-axe BH (est enim semi-axis maior ad semi-axim minorem, vt semi-axis minor ad semi-rectum.) Dico segmentum axis EB esse *MINIMAM* linearum ex E ducibilium ad sectionis peripheriam ABC, & reliquam BD, in qua est centrum, esse *MAXIMAM*.



Descripto enim cum centro E, interuallo EB circulo BF, ipse cadet totus a intra sectionẽ ABC: quare, quę ex centro E ad sectionis peripheriam ducẽtur, præter ad B, omnino maiores erunt, quàm ductæ ex eodem centro ad circuli peripheriam, quibus æqualis est EB, Ergo ipsa EB erit *MINIMA*.

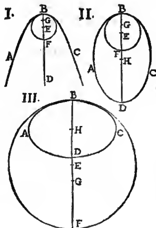
a 1. Coroll. 20. 1. huius.

Si verò, distantia à vertice B fuerit minor eodem recti dimidio qualis est GB: cum ad peripheriam circuli BF ipsa GB sit *MINIMA*, eò magis *MINIMA* erit ad Ellipsis circumscriptam peripheriam ABCD.

2. At in ſecunda tantùm figura, quod reliquum maioris axis ſegmentum E D, vel GD ſit *MAXIMA* ex E, vel G ducibililium, patet: quoniam circulus ex radio H D cadit totus [a] extra Ellipſim A B C D, ſed in circulo, cuius radius H D, ipſa E D, vel G D eſt *MAXIMA*, cum in ea ſit circuli centrum: quapropter E D, vel G D eò magis erit *MAXIMA* ad inſcriptam Ellipſim A B C D. Quod erat primò, &c.

[a] 26. primi huius.

3. Iam in tertia figura ſit A B C D Ellipſis circa minorem axim B D, in quo infra verticem B ſumptum ſit punctum E, quod à vertice diſtet per interuallum, quod primò ſit æquale dimidio recti lateris axis B D. Dico E B eſſe *MAXIMAM* ex E ducibiliũ ad Ellipſis peripheriam A B C D.



Si enim facto centro E, cum radio E B circulus deſcribatur B F, ipſe cadet totus [b] extra Ellipſim; vnde, quæ ex E ad Ellipſis peripheriam ducētur, pręter ad B, minores erunt, quàm quę ex eodem E, ad circuli circumſcriptam circumferentiam, hoc eſt minores ipſa E B. Quare E B erit *MAXIMA*, &c.

[b] 1. Coroll. 20. 1. huius.

Si verò diſtantia à vertice B, maior fuerit eodem recti dimidio, qualis eſt G B: cum ſit in circulo B F, ipſa G B, in qua eſt circuli centrum, *MAXIMA* ad eius peripheriam ducibilium, eò magis *MAXIMA* erit ad inſcriptæ Ellipſis peripheriam A B C D.

4. Quod autem in eadem tertia figura reliquum minoris axis ſegmentum E D, vel G D, ſit *MINIMA* ex E, vel G ducibilium ad Ellipſis peripheriam A B C D, ſic manifeſtum fiet.

Quoniam circulus ex radio H D cadit totus [c] intra Ellipſim A B C D, ſed ad peripheriam circuli ex radio H D ipſa E D, vel G D eſt *MINIMA*, cum in ea non ſit circuli centrum: quare eadem E D, vel G D eò ampliùs erit *MINIMA* ducibilium ad eidem circulo circumſcriptam Ellipſis peripheriam A B C D. Quod erat vltimò demonſtrandum.

[c] 26. primi huius.

SCHOLIVM.

HOC loco animaduertendum eſt, ſemper in Ellipſi circa minorem axim, tertiæ figuræ, interuallum B E ſemi-recti lateris, omnino excedere minorem ſemi-axim B H, (cum integrum rectum latus excedat integrum minorem axim; vt in primo Coroll. 20. primi huius monitum fuit) ac idem punctum E cadere poſſe in quocunq; puncto infra H, habita

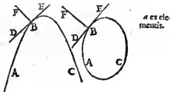
bita tamen ratione proportionis inter minorem axim, & maiorem, quæ proportio, quò minor fuerit, eò magis E, terminus semi-recti lateris, remouebitur à centro H, vt vel modicè introspicienti satis constat.

THEOR. VI. PROP. X.

Si quamcunque coni-sectionem recta linea contingat, cui à tactu extra sectionem perpendicularis erigatur, in qua sumptum sit quodlibet punctum. Linea intercepta inter assumptum punctum, & contactum, erit MINIMA ducibilium ab eodem puncto, ad conuexam coni-sectionis peripheriam.

ESto coni-sectio A B C, quam contingat recta D E in B, à quo ipsi erecta sit perpendicularis BF ad partes conuexæ peripheriæ ABC, sitque in ea assumptum quodlibet punctum F. Dico rectam FB esse *MINIMAM* rectarum ducibilium ab F ad conuexam peripheriam A B C.

Hoc enim per se satis patet: nam cum FB sit perpendicularis rectæ D E, erit quoque *MINIMA* [a] ducibilium ad ipsam D E, quare F B eò magis erit *MINIMA* ducibilium ad conuexam A B C, quę cadit infra D E. Quod erat, &c.



[a] ex elementis.

Quod autem de coni-sectione hoc loco ostenditur, de quacunque etiam curua linea verificari ex ipsa figura satis patet, dummodo curua A B C sit tota ad alteram partem contingentis D E, perpendicularis verò BF ad aliam.

THEOR. VII. PROP. XI.

Si quamcunq; coni-sectionem recta linea, pręter ad axis verticem contingat, cui à tactu intra sectionem erigatur perpendicularis, in qua sumptum sit punctum quodlibet, non tamen, quò ad Ellipsim, vltra maiorem axim; linea intercepta inter assumptum punctum, & contactum erit MINIMA ducibilium ex eodem puncto, ad coni-sectionis peripheriam.

Si verò in Ellipsi assumptum punctum sin perpendiculari fuerit, vel in ipso minori axę, vel vltra: linea inter punctum, & contactum intercepta erit MAXIMA ducibilium ex ipsomet puncto ad Ellipsis peripheriam.

1. ESto A B C Parabole, vel Hyperbole, vt in prima figura, vel Ellipsis, vt in secunda, circa maiorem axim B D, quas in puncto A extra-

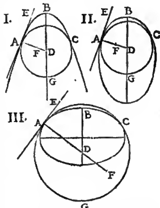
axium

axium vertices contingat recta A E, cui intra sectionem ducta sit perpendicularis A D, quæ priùs maiori axi occurret, [a] vt in D. Dico rectam D A, & quamlibet ipsa minorem F A, esse *MINIMAM* ducibilium ad sectionis peripheriam A B C, ex punctis D, vel F.

[a] 88. primi h.

Nam facto centro D, interuallo D A, ac circulo descripto A C G, ipse cadet totus [b] intra sectionem A B C, in duobus tantùm punctis A, C, eam contingens: quare quę ducentur ex D ad sectionis peripheriam, pręter ad puncta A, C, interuallo D A maiores erunt: exquo ipsa D A, vel D C erit *MINIMA*, &c. Si verò interuallum F A minus sit ipso D A. Cum in circulo A C G ipsum F A diametri segmentum, in quo centrum non reperitur, sit rectarum *MINIMA* ad circuli peripheriam ducibilium, eò magis eadem F A *MINIMA* erit ducibilium ex F, ad peripheriam circumscriptę sectionis A B C. Quod erat primò, &c.

[b] 92. primi h.



2. Iam, in tertia figura, sit Ellipsis A B C, circa minorem axim B D, & contingens linea ad punctum A, quod non sit axium vertex, sit A E, cui ex contactu A, ducta sit intra sectionem recta A D, quę post occursum cum maiori axe, occurret quoque [c] minori, vt in D. Dico rectam D A, & quamlibet aliam F A ipsa D A maiorem, *MAXIMAM* esse ducibilium ex D, vel F, ad Ellipsis peripheriam A B C.

[c] 88. primi huius.

Descripto enim circulo A C G ex radio D A, ipse cadet totus [d] extra Ellipsim A B C hanc tantùm contingens in duobus punctis A, C; quapropter, quæ ducentur ex D ad Ellipsis peripheriam, præter ad puncta A, C, distantia D A minores erunt: vnde D A, vel D C erit *MAXIMA*, &c. Si autem interuallum F A maius fuerit ipso D A. Cum in circulo A C G in diametri segmento F A sit circuli centrum, ipsam F A, erit *MAXIMA* ad circuli peripheriam A C G ducibilium, & eò magis eadem F A *MAXIMA* ducibilium ex F, ad peripheriam inscriptæ Ellipsis A B C. Quod erat vltimò demonstrandum.

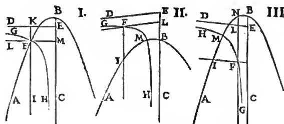
[d] 92. primi huius.

THEO-

THEOR. VIII. PROP. XII.

Si per punctum quodlibet sumptum in angulo à rectis lineis comprehenso, quarum altera sit datæ Parabolæ, vel Hyperbolæ diameter, aut ipsi æquidistans, altera verò sit quælibet sectioni ordinatim ducta, vel huic parallela, descripta sit sectio Hyperbole, cuius asymptoti sint prædicti anguli latera; huiusmodi Hyperbole datam sectionem in vno tantùm puncto necessariò secabit.

ESto Parabole, vel Hyperbole A B, cuius diameter, vel diametro æquidistans sit BC, quàm ad quemcunque angulum D E C secet D E, quæ vel sit vna applicatarum in sectione, vel ipsis æquidistans, & in angulo D E C, per datum in eo punctum F, describatur[a] Hyperbole G F H, cuius asymptoti sint D E, E C. Dico hanc vltrò, citroque productam, in vno tantùm puncto sectionem secare. [a] 4. sec. conic.



Ductis enim, in prima figura, per punctum F, quod est in sectione A B, rectis L F M, I F K asymptotis D E, E C æquidistantibus, eisque occurrentibus in M, K. Patet rectam M F L etiam si in infinitum productam ad partes L, in ipso tantùm puncto F sectioni A B occurrere, cum sit vna applicatarum in data sectione; & rectam I F K in eodem tantùm puncto F cum sectione A B conuenire[b] cum ipsa rectæ B C, vel diametro datæ sectionis æquidistet; sed Hyperbole G F H à puncto F ad partes G, tota incedit in angulo K F L, & inter æquidistantes F L, K D; & à puncto F ad partes H, tota incedit in angulo M F I, ac inter parallelas F I, M C; quare ipsa Hyperbole G F H in nullo alio puncto quàm F sectioni A B occurret. [b] 26. primi conic.

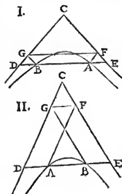
In secunda verò, ac tertia figura, ductis ex dato puncto F (quod ibi extra cadit, hic verò intra sectionem) rectis F L, F I alteri asymptoto, & se-

& sectioni occurrentibus in L, I. Constat Hyperbolen ex F ad partes H omnino incedere intra angulum L F I, & cum ipsa in infinitum extendi possit, cumque in secunda figura spatium F I B sit occlusum ad I, & ad rectam L B nunquam possit prouenire, eò quod ipsa L B ponatur Hyperbole G F H asymptotos: in tertia verò cum spatium F I N sit vndique occlusum, necessariò, in vtraque figura, descripta Hyperbole G F H in aliquo puncto datam sectionem secabit. Sit ergo harum mutua intersectio punctum M, per quod ductis, vt factum fuit in prima figura, rectis lineis quæ asymptotis E D, E C æquidistent, iisdem penitus argumentis, ac in primo casu, demonstrabitur ipsam Hyperbolen in nullo alio puncto quàm M cum data sectione A B conuenire. Quare si per punctum in angulo, &c. Quod erat demonstrandum.

THEOR. IX. PROP. XIII.

Si in Hyperbola, sumpta fuerint duo quælibet puncta, à quibus ductæ sint asymptotis æquidistantes, eisque occurrentes: recta linea iungens occursus; lineæ, data puncta iungenti, æquidistabit.

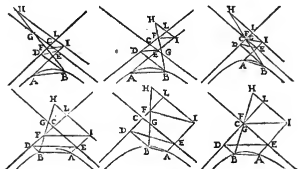
ESto Hyperbole A B, cuius asymptoti C D, C E, sumptaque sint in sectione duo quælibet puncta A, B, à quibus ductæ sint A F, B G, asymptotis æquidistantes. Dico iunctas A B, F G, esse inter se parallelas.



a 8. sec. conic. Nam vtrinque producta A B vsque ad asymptotos in D, & E. a Erit in prima figura, B D æqualis A E: in secunda verò, cum sit A D æqualis B E, addita communi A B, erit item D B æqualis ipsi A E. Sed in triangulis D B G, E A F, anguli ad D, B, æquantur angulis ad A, & E, vterque vtrique, ob paralellas D G, A F, & B G, E F; quare triangula D B G, A E F sunt similia inter se, ac propterea vt D B ad B G, ita A E ad E F, sed antecedentes D B, A E sunt æquales, vt modò ostendimus, ergo, & consequentes B G, E F, æquales erunt, at sunt quoque inter se parallelæ, quare, & F G ipsi A B æquidistabit. Quod, &c.

THEOR. X. PROP. XIV.

Si in Hyperbola ſumpta fuerint duo quælibet puncta, è quorum vno ducta ſit recta linea, alteri aſymptoto æquidiſtans, aliamque ſecans; ex reliquo verò alia vtranque aſymptoton diuidens in angulo, qui aſymptotali deinceps eſt, à qua, producta in angulo ad verticem aſymptotalis, ſumatur ęqualis ei, quę ex ipſa inter prædictum punctum, & alteram aſymptoton intercipitur, atque ex ſumptæ termino ducta ſit parallela ei aſymptoto, cui prima eductarum occurrit, hanc ipſam ſecans; recta linea huiuſmodi interſectionem iungens cum puncto, in quo ſecunda eductarum eam aſymptoton ſecat, cui prima æquidiſtat, rectæ data puncta iungenti æquidiſtabit.

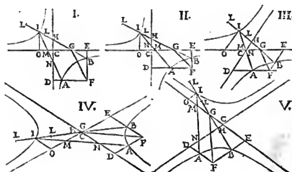


SInt in Hyperbola A B, cuius aſymptoti C D, C E, ſumpta duo quæcunque puncta A, B, è quorum altero A ducta ſit A E I alteri aſymptoto C D æquidiſtans, ex B verò quælibet B G F vtranque ſecans in G, & F; ſectaque G H in directum, & æquali ipſi B F, ducatur ex H recta H I parallela ad C E occurrens cum productis D C, A E in L, & I. Dico iunctas A B, F I eſſe inter ſe parallelas.

Ducta enim B D parallela ad C E, iunctaque D E, cum ſit B F æqualis G H, erit quoque D F æqualis C L, ob parallelas D B, G E, H I, ſed eſt C L æqualis ipſi E I, quare D F, & E I æquales erunt, ſuntque etiam parallelæ, ergo F I æquidiſtat ipſi D E, ſed eſt A B [a] æquidiſtans eidem D E, quare F I, & A B ſunt quoque inter ſe parallelæ. Quod, &c. [a] 13. h.

THEOR. XI. PROP. XV.

Si à puncto, quod est intra Hyperbolen, ductæ sint duæ rectæ lineæ asymptotis æquidistantes, & Hyperbolæ in duobus punctis occurrentes, è quorum altero ducta sit recta linea vtranque asymptoton secans, à qua, producta in angulo, qui asymptotalis est ad verticem, à puncto alteram asymptoton secante dematur æqualis ei, quę inter eductæ occursum cum alia asymptoto intercipitur: recta linea ad eundem occursum iungens cum dato puncto, æquidistabit rectæ, sumptæ terminum iungenti, & sectionis punctum, in quo conuenit recta alteri asymptoto ęquidistanter ducta.



Esto intra Hyperbolen A B, cuius centrum C, & asymptoti C D, C E vltra centrum productæ, sumptum quodcunque punctum F, à quo ductæ sint F A D, F B E asymptotis æquidistantes, quæ Hyperbolen secent in punctis A, B, è quorum altero, vt ex B, ducta sit quæcunque B I asymptoton C E secans in G, & C D in H, sumptaque H I æquali, & in directum ipsi B G, iungantur rectæ I A, G F. Dico has inter se esse parallelas.

Nam cum recta G H secet vtranque linearum C G, C H continentium angulum H C G, qui deinceps est angulo D C E Hyperbolen A B continenti, sitque ea (per constructionem) hinc inde æqualiter producta in B, I, & punctum B sit ad Hyperbolen A B, erit etiam punctum I ad ei oppositam sectionem. Si enim opposita sectio in alio puncto, pręter I, secaret

caret rectam G I, vt in L; tunc G L *a* æquaretur ipsi H B, ideoque G I, G L inter se æquales essent, totum, & pars, quod est absurdum. *a 16. sec. conic.*

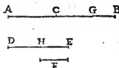
Cum ergo puncta I, A cadant in oppositas sectiones, iunctaque sit I A secans rectas C O, C D continentes angulum O C D, qui deinceps est angulo D C E sectionem A B continenti *b* erunt ex ipsa abscissæ lineæ M I, N A inter asymptotos, & sectiones interiectæ inter se æquales. Producantur F A, F B vsque ad asymptotos in D, E; agaturque ex I recta I O æquidistans ad C D. Cumque triangulorum I O M, N D A, bases I M, N A sint in directum constitutæ, sintque latera I O, N D; M O, A D inter se parallela, singula singulis, erunt quoque anguli ad I, & N; vti etiam ad M, & A inter se æquales; sed & bases I M, N A inter se sunt æquales, vt superiùs demonstratum fuit, quare, & reliqua latera M O, A D æqualia erunt. *b ibidem.*

Præterea cum sit linea B G æqualis H I, erunt quoque E G, C O inter se æquales (ob æquidistantiam linearum I O, H C, B E,) quibus addita communi G C in prima, secunda, & tertia figura, vel dempta in quinta, proueniet E C, æqualis ipsi G O, sed F D, E C sunt æquales (nam sunt latera opposita in parallelogrammo C F,) quare F D ipsi G O æqualis erit; si ergo ex his demantur æquales M O, A D; reliquæ G M, F A æquales erunt, at sunt quoque parallelæ, vnde G F, I A inter se æquidistabunt. Quod demonstrare oportebat.

LEMMA V. PROP. XVI.

Sint duæ rationes, A B nempe ad B C, & D E ad F maioris inæqualitatis, & sit ratio A B ad B C, minor ratione D E ad F. Oportet B C, ita secare in G, ita vt A G ad G C sit vt D E ad F.

Fiat E H æqualis F, & vt D H ad H E, ita A C ad C G, & punctum G erit quæsitum. Quoniam cum A C ad C G sit vt D H ad H E, erit componendo A G ad G C, vt D E ad E H, vel ad F. Quod faciendum erat.



Quod autem punctum G eadat infra B, patet. Nam ex hypotesi, A B ad B C habet minorem rationem quàm D E ad F, vel ad E H, quare diuidendo A C ad C B habebit minorem rationem, quàm D H ad H E, vel quàm eadem A C ad C G; ergo C B est maior C G; siue punctum G cadit infra B. Quod demonstrandum erat.

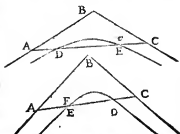
COROLL.

Hinc, data ratione maioris inæqualitatis, hoc eſt D E, ad E H, & differentia A C inter duos terminos ignotos A G, G C, qui debeant eſſe in data ratione, eruitur quomodo reperiantur ipſi termini A G, G C. Facta enim fuit vt D H differentia primorum, ad H E minorem terminum, ita data differentia A C, ad aliam C G, & reperti ſunt quæſiti termini A G, G C. Nam ſtatim oſtenſum fuit eſſe A G ad G C, vt D E ad E H.

THEOR. XII. PROP. XVII.

Si fuerit in angulo rectilineo quælibet applicata, à qua hinc inde ab eius termino æqualia ſegmenta ſint abſciſſa, & per vnum diuiſionis punctum deſcribatur Hyperbole, cuius aſymptoti ſint latera dati anguli, ipſa per alterum punctum neceſſariò tranſibit.

Sit in angulo A B C applicata quæcunque A C, quæ inæqualiter ſecetur in D, & ſumatur C E æqualis A D. Dico ſi per punctum D deſcribatur Hyperbole, cuius aſymptoti ſint B A, B C, ipſam omnino tranſire per E,



Quod huiuſmodi Hyperbole tranſiens per D, alibi ſecet applicatam A C, patet. Nam ſi eam contingeret in D, eſſet A C æqualiter [a] ſecta in D; quod eſt contra hypoteſim. Secet ergo in F; & erit F C [b] ęqualis A D, ſed eſt quoque E C eidem A D ęqualis, quare F C, E C ęquales erunt; hoc eſt punctum F congruet cum ipſo E; quare Hyperbole D F, quæ in angulo aſymptotali A B C deſcribitur per D, omnino tranſit per E. Quod erat demonſtrandum.

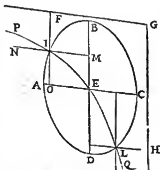
[a] 3. ſecundi conic.
[b] 8. ibid.

THEO-

THEOR. XIII. PROP. XVIII.

Si per centrum Ellipsis describatur Hyperbole, cuius asymptoti coniugatis diametris æquidistent; ipsa in duobus tantùm punctis Ellipsis peripheriam secabit.

Esto Ellipsis A B C D, cuius centrum E, & diametri coniugatæ sint A C, B D quibus ductæ sint F G, H G ipsis diametris altera alteri æquidistantes, & simul occurrentes in G; & cum asymptotis G F, G H, per centrum E, descripta sit Hyperbole I E L. Dico hanc, Ellipsis peripheriam in duobus tantùm punctis secare.



Nam cum in Hyperbola I E L sumptum sit punctum E, per quod ductæ sunt A E C, D E B asymptotis æquidistantes, ipsæ in puncto tantùm E sectioni occurrent, & Hyperbole in angulo B E A, inter E A, & G F semper incedet, pariterque in angulo C E D, inter E D, & G H; sed anguli B E A, C E D terminantur à peripherijs B A, C D, quare Hyperbole ex vtraque parte producta ipsas peripherias omninò secabit, vt in I, L. Si ergo ex I ducantur M I N, O I F diametris æquidistãtes, ob eandem rationem superiùs allatam sectio E I P, in nullo alio puncto, quàm I cum rectis N I M, F I O conueniet, sed ipsæ N I M, F I O nil aliud commune habent cum peripheria quadrantis A B, quàm idem punctum I, quare Hyperbole E I P in vno tantùm puncto I Ellipsis peripheriam secabit in quadrante A B. Cõsimili constructione, & argumento, ostendetur sectionem E L Q in alio puncto quàm L peripheriam D C non secare: quare huiusmodi Hyperbole in duobus tantùm punctis secat Ellipsis peripheriam. Quod erat demonstrandum.

THEOR. XIV. PROP. XIX.

Si à puncto, quod est in angulo asymptotali, ductæ sint rectæ lineæ asymptotis æquidistantes, & Hyperbolæ occurrentes, atque ex vnius eductarum occursu agatur recta, quæ sectionem, vel in ipso tangens puncto, vel alibi secans, producta secet quoque eam asymptoton, cui altera eductarum æquidistat; recta linea iungens hoc idem punctum cum puncto contactus, vel interfectionis nouiter ductæ lineæ cum Hyperbola, æquidistabit rectæ, quę ab occursu eiusdem lineæ cum prædicta asymptoto ad datum punctum educitur.

Sit Hyperbole A B C, in cuius angulo asymptotali E D F sumptum sit quodlibet punctum G, vel extra Hyperbolen, vt in prima, secunda, & tertia; vel intra, vt in quarta, quinta, & sexta figura, à quo ductæ sint asymptotis æquidistantes G A, G C, sectioni occurrentes in A, C; & ex altero occursuum C ducta sit quæcunque alia C B E, quæ, vel sectionem contingat in C, vt in prima, & quarta figura, vel alibi secet in B, vt in reliquis, & producta conueniat cum asymptoto D E, quæ rectæ G A ęquidistat. Dico, si iungantur A B, E G ipsas inter se æquidistare.

Nam ducta B H parallela ad F D, productisque A G, C G vsque ad asymptotos in F, L; & E B C ad aliam asymptoton D F in I. Erit iuncta
a 13. h. A B iunctæ H F [a] parallela, est autem E B æqualis C I; quare, ob parallelas B H, C L, I D, erit quoque E H æqualis ipsi L D, siue ęqualis G F; sed

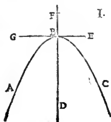
sed EH, GF sunt etiam parallelæ, ergo, & EG æquidistat HF, sed AB quoque ipsi HF æquidistat, vt modò ostendimus: quare AB, & EG sunt inter se parallelæ. Quod erat, &c.

PROBL. I. PROP. XX.

A dato puncto, ad datæ Parabolę peripheriam, MINIMAM rectam lineam ducere.

Sit data Parabole ABC, cuius axis BD, vertex B, rectum latus BE, & datum vbicunque punctum sit F. Oportet ex F ad peripheriam ABC, *MINIMAM* rectam lineam ducere.

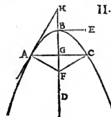
Esto primùm datum punctum F extra Parabolen in axe producto, vt in prima figura. Dico ipsam FB esse *MINIMAM*.



Nam cum BD sit axis Parabolæ, si ex B ducatur BG ordinatis æquidistans, ipsa cum FD rectos angulos efficiet, ac Parabolen [a] continget. Cum ergo BF perpendicularis sit contingenti BG, erit FB *MIMIMA* [b] omnium, quæ ex F ad peripheriam ABC educi possunt. Quod erat, &c.

Si verò datum punctum F, in secunda figura, fuerit in ipso axe BD intra Parabolen ABC, quod distet à vertice B, per interuallum non maius dimidio recti BE, idem axis segmentum FB erit *MINIMA* [c] recta quæsita.

Si autem datum punctum F in eadem figura sit in axe BD, sed interuallum FB maius sit dimidio recti BE. Secetur FG æqualis eidem dimidio, & applicetur GA peripheriæ occurrens in A. Dico iunctam FA esse *MINIMAM* quæsitam.



Ducta enim ex A [d] contingente AH, ipsa cum axe producta [e] conueniet in H; eritque HB ęqualis [f] BG, siue HG dupla GB, estque EB dupla GF, ex constructione, ergo HG ad GB est vt EB ad GF; ex quo rectangulum HGF æquabitur rectangulo EBG, siue [g] quadrato GA; quare angulus FAH rectus [h] erit. Cumque AF sit ex contactu A contingenti AH perpendicularis, & punctum F sit in axe, erit FA *MINIMA* [i] ducibilium ad Parabolæ peripheriam ABC. Quod, &c.

Si denique datum punctum F sit extra Parabolen ABC, vt in tertia figura, vel extra, vt in quarta, inter axem BD, & peripheriam BA; Applicetur ex recta FFG axi occurrens in G, demanturque de axe supra

FG re-

[a] 32. primi conic.
[b] 10. h.
[c] 9. huius ad nu. h.
[d] 2. pr. h.
[e] 24. primi conic.
[f] 35. ibid.
[g] Coroll. pr. 1. h.
[h] 203. Sept. Pappi.
[i] 11. h. ad num. 1.

F G recta G H æqualis dimidio recti B E, & ex H agatur H I parallela ad G F, & in angulo I H D per punctum F describatur [a] Hyperbole F A, quæ Parabolæ peripheriam in vno tantùm puncto A secabit, [b] & iungatur F A. Dico hāc esse *MINIMAM* quæsitam.

Applicetur A L, & ex A ducatur contingens A M, axi occurrens in M, producaturque F A ad vtranque partem, quæ cum asymptotis [c] conueniet in I, D, eruntq; in vtraque figura, interceptę A I, F D inter se ęquales, ac ideo H L, G D ęquales erunt, ob ęquidistantes lineas I H, A L, F G, in triangulo I H D; si ergo, in tertia figura, dematur communis L G, & in quarta, addatur, fient H G, L D inter se æquales; sed est G H dimidia B E, quare, & L D ipsius B E dimidia erit. Et quoniam quadratum A L æquatur rectangulo [d] L B E, & rectangulum L B E, æquale est rectangulo sub dupla L B, siue sub [e] M L, & sub dimidia B E, hoc est sub L D, ergo quadratum A L æquale erit rectangulo M L D, ac ideo angulus M A D rectus [f] erit, siue F A erit ex contactu A contingenti A M perpendicularis: quare F A, in vtraque figura, erit [g] *MINIMA* quæsita. Quod faciendum erat.

[a] 4. sec. conic.
[b] 12. h.
[c] 8. secūdi conic.
[d] Coroll. primæ 1. huius.
[e] 35. primi conic.
[f] 203. Sept. Pappi.
[g] 10. h. & 11. h. ad num. 1.

MONITVM.

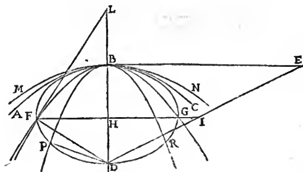
Non te pigeat hoc loco, Lector humanissime, à suscepta MAXIMARVM, MINIMARVMQVE linearum inuestigatione circa reliquas coni-sectiones, aliquantisper recedere, dum elegantissimam quandam, ac vere admirabilem affectionem exhibere tibi decernimus, circa MINIMAS lineas, ad peripherias infinitarum Parabolarum, per eundem verticem simul adscriptarum, ex eodem communis axis puncto ducibiles, quarum vestigia, dum hęc ipsam propositio prælo subijcitur, nescio qua parùm morata cura insequi volumus. Huius itaque itineris delineatio, est quæ consequitur.

THEO-

THEOR. XV. PROP. XXI.

Semita MINIMARVM linearum, ducibilium à puncto communis axis infinitarum Parabolarum, per eundem verticem simul adscriptarum, ad earundem sectionum peripherias, est circumferentia Ellipsis, cuius transuersum latus sit ipsum axis segmentum, inter assumptum punctum, & verticem interceptum: rectum verò eiusdem transuersi sit duplum.

ESto Parabole ABC, cuius axis BD, in quo sumptum sit punctum D à vertice B distans per interuallum æquale dimidio sui recti BE: patet ipsam DB esse [a] *MINIMAM* ad peripheriam ABC; & si aliæ Parabolæ concipiantur per B adscriptæ, quarum recta latera excedant BE, constat ipsas cadere [b] extra, qualis est MBN, & eandem DB (quæ omnino erit minor dimidio ipsius recti lateris) ad eius peripheriam esse [c] *MINIMAM*. At si Parabolæ fuerint ipsi ABC per B verticem inscriptæ, [a] 9. huius ad nu. 1. [b] 2. Coroll. 19. pr. huius. [c] 9. huius ad nu. 1.



patet etiam ipsarum latera minora [d] esse recto BE, ac ideo DB quorunlibet ipsorum laterum dimidium excedere, & *MINIMAS* ducibiles ex D, ad harum Parabolarum peripherias pertingere, præter ad verticem B. Si ergo quæratur, quàm delineent semitam harum *MINIMARVM* extrema puncta. Describatur circa segmentum axis BD, tanquam circa transuersum latus, Ellipsis BFDG, cuius rectum sit ipsum BE. Constat hanc esse *MAXIMAM* Parabolæ ABC per B verticem [e] inscriptibilem. Dico huius peripheriam BFDG prædictarum *MINIMARVM* esse tramitem. [d] ex 2. Coroll. 19. pr. huius. [e] ex 20. pr. huius.

Iungatur Ellipsis regula DE: & Parabolę ABC inscribatur quælibet alia FBG, quæ Ellipsis peripheriam ad vtranq; partem omnino secabit, vt

D in F, G

in F, G (nam Parabole A B C est [a] *MINIMA* Ellipsi F B G circumscriptibilium) è quorum altero F ducta sit ordinata F H I communem axem in H, regulam verò secans in I; sitque F L Parabolen [b] contingens ad F, axemque secans [c] in L.

[a] ibidem.
[b] 2. primi huius.
[c] 24. primi conic.

Iam, in triangulo E B D cum sit E B dupla B D, erit I H dupla H D; sed est quoque L H dupla H B, quare vt L H ad H B, ita I H ad H D: rectangulum ergo L H D æquale est rectangulo B H I, [d] siue quadrato F H, estque F H ipsi L D perpendicularis, quare angulus D F L rectus [e] est, & F L Parabolen contingit in F: vnde D F est [f] *MINIMA* ducibilium ex dato puncto D ad peripheriam Parabolæ F B G. Consimili ratione ostendetur, quamlibet aliam inscriptam P B R Ellipsis peripheriam B F G D secare, vt in P, R, & iunctam D P, vel D R esse *MINIMAM*, &c. Quare semita *MINIMARVM* ex D ad huiusmodi Parabolarum peripherias, est prædictæ Ellipsis perimeter. Quod ostendere propositum fuit.

[d] Coroll. primæ 1. huius.
[e] 203. Sept. Pappi.
[f] 11. huius ad nu. 1.

PROBL. II. PROP. XXII.

A dato puncto, ad datę Hyperbolæ peripheriam, MINIMAM rectam lineam ducere.

Sit data Hyperbole A B C, cuius axis B D, rectum B E transuersum verò B G, centrum H, & datum vbicunque sit punctum F. Oportet ex F ad Hyperbolæ peripheriam A B C *MINIMAM* rectam lineam ducere.

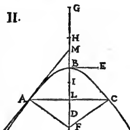
Si primò datum punctum F, in prima figura fuerit in axe producto, extra Hyperbolen, ipsa F B erit [g] *MINIMA*.

[g] 10. h.

Si da-

Si datum punctum F sit in axe intra sectionem, vt in secunda figura, quod tamen distet à vertice per interuallum non maius dimidio recti B E: item F B erit [a] *MINIMA*. [a 9. huius ad nu. 1.]

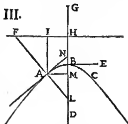
Cum verò, in eadem figura, segmentũ F B excedet prædictum recti dimidium: dematur B I æqualis semi-recto B E, & tunc habebit H B ad B I maiorem rationem quàm ad B F: si ergo H F secetur in L, ita vt H L ad L F, sit vt H B ad B I, punctum L omnino cadet inter B & F; itaque ducta A L C ordinatim axi applicata, iunctaq; F A. Dico ipsam F A esse *MINIMAM* quæsitam.



Ducta enim ex A [b] contingente A M, quæ axi occurret [c] in M. Erit rectangulum H L M ad quadratum L A, vt [d] transuersum latus ad rectum, vel vt G B ad B E; vel sumptis subduplis, vt H B ad B I; vel, ob constructionem, vt H L ad L F; vel, sumpta communi altitudine L M, vt idem rectangulum H L M ad rectangulum F L M: ergo quadratum L A æquabitur rectangulo F L M, sed est A L ipsi F M perpendicularis: quare angulus F A M [e] rectus erit, sed A M sectionem contingit in A: ergo F A est *MINIMA* ducibilium ex F ad Hyperbolæ [f] peripheriam A B C, est autem F C æqualis F A: vnde in hoc casu duę erunt *MINIMAE*, &c. [b 2. pr. h.] [c 24. primi conic.] [d 37. ibid.] [e 203. Sept. Pappi.] [f 11. h. ad num. 1.]

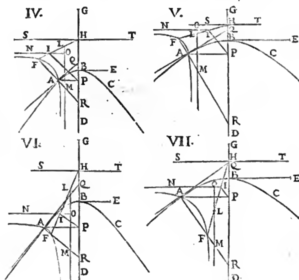
At si datum punctum F fuerit in axe coniugato H F, vt in tertia figura. Diuidatur F H in I, ita vt F I ad I H sit vt transuersum G B ad rectũ B E, & per I agatur I A axi æquidistans, quæ in vno tantùm puncto A Hyperbolæ [g] occurret. Dico iunctam F A esse *MINIMAM* quæsitam. [g 26. primi conic.]

Producatur F A axi occurrens in L, cui applicetur A M, ducaturque ex A [h] contingens A N, quę axi occurret [i] in Q. Erit in triangulo F L H, ob parallelas, H M ad ad M L, vt F A ad A L, vel vt F I ad I H; vel vt transuersum ad rectum per constructionem; vel vt rectangulum H M N [l] ad quadratum M A, sed eadem H M ad M L, (sumpta communi altitudine M N) est vt idem rectangulum H M N ad rectangulum L M N; vnde quadratum M A, æquabitur rectangulo N M L, & est A M ipsi L N perpendicularis: quare angulus L A N, & qui ei deinceps est F A N rectus [m] erit, sed A N sectionem contingit, ergo F A [n] est *MINIMA* quæsita. [h 2. pr. h.] [i 24. primi conic.] [l 37. ibid.] [m 203. Sept. Pappi.] [n 10. h.]



Si autem datum punctum F sit extra Hyperbolen inter axem coniugatum S H T, & sectionis peripheriam, vt in quarta, & quinta figura, vel

intra Hyperbolen, inter axem, & peripheriam, vt in sexta, & septima (nam si esset in ipsa peripheria, vt in A, tunc *MINIMA* abiret in punctum.) Iungatur H, centrum Hyperbolæ, cum dato puncto F recta linea HF, quæ ita secetur in I, vt H I ad I F sit vt transuersum latus G B ad rectum B E, sumaturque H L æqualis F I, & per L agatur L M axi B D æquidistans, ac per I axi ordinata N I O, & in angulo N O M per datum
a 4. secundi conic. in eo punctum A describatur[a] Hyperbole F A, quæ in vno tantùm pun-
b 12. h. ctum A cum sectione A B C[b] conueniet. Dico iunctam F A esse *MINIMAM* quæsitam.



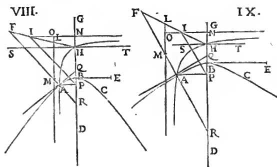
c 2. pr. h. Ducatur A P axi ordinata, & A Q Hyperbolen contingens,[c] in A, quę
d 24. primi conic. secabit[d] axim in Q. Et quoniam in Hyperbola A F sumpta sunt duo puncta A, F, è quorum altero A ducta est A P alteri asymptoto N O æquidistans, ex altero verò F, recta F I L H vtranque asymptoton secans in I, L; estque L H in directum, & æqualis posita ipsi I F, & ex H recta H B P alteri asymptoto O M æquidistans, cum alia A P conueniens in P,
e 14. h. erit iuncta I P[e] parallela ad F A; sed H P secat I P alteram parallelarum, quare producta secabit quoque reliquam H F: secet igitur in R. Erit ergo in triangulo H F R (ob parallelas) H P ad P R, vt H I ad I F, vel vt transf-

transuersum latus ad rectum, per constructionem, [a] vel vt rectangulum HPQ ad quadratum PA; sed eadem HP ad PR (sumpta communi altitudine PQ) est vt idem rectangulum HPQ ad rectangulum RPQ, quare quadratum PA æquabitur rectangulo RPQ, estque AP ipsi RQ perpendicularis, vnde angulus RAQ, & in quarta, & quinta figura, qui ei deinceps QAF [b] rectus erit, sed AQ sectionem contingit, quare perpendicularis FA [c] erit *MINIMA* quæsita.

[a] 37. primi conic.
[b] 203. Sept. Pappi.
[c] 10. et 11. huius ad num. 1.

Si denique datum punctum F sit extra Hyperbolen, sed supra axem coniugatum HS, vt in octaua, & nona figura. A centro H datę Hyperbolæ ad datum punctum F ducatur HF, quæ ita secetur in I, ita vt HI ad IF, sit vt transuersum latus GB ad rectum BE, sumptaque HL ęquali ipsi IF, per I agatur ION ordinatim ductis æquidistans, & per L recta LOM axi HBD parallela, & in angulo NOM per datum punctum H (quod est centrum Hyperbolæ) describatur [d] alia Hyperbole HA, quæ alteram ABC in vno tantùm [e] puncto A secabit. Dico iunctam FA esse *MINIMAM* quæsitam.

[d] 4. secundi conic.
[e] 12. h.



Sit AP axi ordinatim applicata, & AQ ex A sectionem [f] contingens, axemque secans [g] in Q, iungaturque IP. Iam in Hyperbola AH, cuius asymptoti ON, OM, sumptum est punctum P, à quo ductæ sunt PA, PH asymptotis æquidistantes, & Hyperbolæ occurrentes in A, H, & ab eorum altero H ducta est HLI vtranque asymptoton secans in I, L, estque IF in directum, & æqualis posita ipsi HL, rectaque FA coniungit extremum F cum altero datorum A; ipsa FA [h] æquidistabit iungenti IP; sed HP secat IP quare producta secabit quoque alteram parallelarum FA, si hæc vltra FA producatur. Sit ergo harum occursus R. Erit in triangulo FHR recta HP ad PR, vt HI ad IF, vel vt latus transuersum ad rectum, ex constructione, vel [i] vt rectangulum HPQ ad quadratum PA, sed eadem HP ad PR (sumpta communi altitudine PQ) est vt idem rectangulum HPQ ad rectangulum RPQ: quare quadratum

PA,

[f] 2. pr. h.
[g] 24. primi conic.
[h] 15. h.
[i] 37. primi conic.

P A, & rectangulum R P Q inter se sunt æqualia, sed est A P ipsi Q R perpendicularis, ergo angulus Q A R rectus [a] erit, pariterque is qui ei deinceps Q A F. Quare perpendicularis F A [b] erit *MINIMA* quæsita. Quod faciendum erat.

a 203. Sept. Pappi. b 10. h.

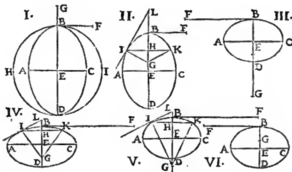
PROBL. III. PROP. XXIII.

A dato puncto, ad datæ Ellipsis peripheriam, MAXIMAM, & MINIMAM rectam lineam ducere.

Sit data Ellipsis A B C D, cuius centrum E, axis minor A C, maior B D, rectum latus B F, & datum punctum sit G. Oportet ex G, ad peripheriam A B C, *MAXIMAM*, & *MINIMAM* rectam lineam ducere.

1. Si primò datum punctum congruit cum centro E: duo maiores semi-axes E B, E D, erunt *MAXIMAE*, duo verò semi-axes minores E A, E C [c] erunt *MINIMAE*.

c 86. primi huius.



2. Si datum punctum fuerit in vertice B maioris axis; ipsæ maior axis BD erit *MAXIMA* ducibilium ex B, &c. Nam si concipiatur descriptus circulus B H D I ex radio E B, hoc est circa diametrum B D, eius peripheria cadet tota extra [d] peripheriam Ellipsis A B C D; & cum B D sit *MAXIMA* ad peripheriam circuli, eò ampliùs erit *MAXIMA* ad inscriptam Ellipsis peripheriam. Verùm non dabitur *MINIMA* ex B, cum ipsa in punctum abeat.

d ex 26. pr. huius.

3. Si autem datum punctum G in eadem prima figura fuerit in axe maiori, extra tamen Ellipsim: tota G D erit *MAXIMA*: est enim *MAXIMA* ad peripheriam circuli B H D I, cum in ea sit centrum, ergo ad peripheriam inscriptæ Ellipsis omnino *MAXIMA* erit. G B verò erit [e] *MINIMA*, cum ipsa G B sit extra Ellipsim perpendicularis ad rectum BF, quod ad B contingit Ellipsim.

e 10. h.

Si verò,

4. Si verò, in secunda figura, datum punctum G fuerit in maiori semiaxe, at distet à vertice B per interuallum G B non maius dimidio recti B F, ipsa G D, in qua centrum, erit *MAXIMA*, [a] & reliqua G B *MINIMA*. a 9. huius ad nu. 1. 2.

5. At si in eadem figura datum punctum G item fuerit, in maiori semiaxe E B, sed distet à vertice B per interuallum maius dimidio recti B F (nam semi-axis maior E B, est semper maior semi-recto B F, cum totus axis B D sit maior toto recto B F) *MAXIMA* erit [b] G D, in qua centrum: *MINIMA* verò venabitur sic. b 6. huius.

Cum sit B G maior semi-recto B F, habebit E B ad B G minorem rationem, quàm E B ad semi-rectum B F, vel sumptis duplis, quàm transuersum D B ad rectum B F, suntque hæ rationes maioris inæqualitatis: Itaque diuidatur [c] B G in H, ita vt E H ad H G sit vt D B ad B F, & per H applicetur I H K, & iungantur G I, G K: nam ipsæ, quæ sunt æquales, erunt *MINIMAE*. c 16. h.

Quoniam ducta I L contingente, hæc axi occurret [d] in L: & cum sit E H ad H G, vt transuersum D B ad rectum B F, sumpta communi altitudine H L, erit rectangulum E H L ad G H L, vt transuersum ad rectum, sed est quoque rectangulum E H L ad quadratum H I, [e] vt transuersum ad rectum, ergo rectangulum E H L ad G H L, est vt idem E H L ad quadratum H I, quare rectangulum G H L æquale est quadrato H I: estque H I ipsi G L perpendicularis, ergo angulus G I L rectus erit, & I L sectionem contingit in I, à quo ducta est I G perpendicularis, & maiori axi occurrens, quapropter G I erit [f] *MINIMA*, estque G K æqualis G I. Vnde in hoc casu duæ erunt *MINIMAE*, & vna tantùm *MAXIMA*. d 25. primi conic. e 37. ibid. f 11. h.

6. Si verò datum punctum G fuerit in axe minori, vt in tertia figura, & distantia G B sit non minor dimidio recti lateris B F: (quæ G B omnino maior erit semi-axe B E, vt ad finem 9. huius monuimus) tunc ipsa G B erit *MAXIMA*, [g] & G D *MINIMA*, vel punctum G cadat infra D; vel supra inter D, & E. Nam si caderet in ipso puncto D (dummodo D B sit vt ponitur, nempe non minor dimidio recti) ipsa D B esset *MAXIMA*, nec daretur *MINIMA*, cum hæc in punctum euanescat. g 9. huius ad num. 3.

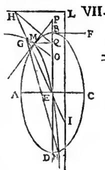
7. Verùm, si datum punctum G sit in axe minori, sed distet à vertice B per interuallum minus dimidio recti B F, & cadat infra centrum E, vel inter E, & D; vt in quarta figura, aut infra D, vt in quinta. Cum sit G B minor semi-recto, & E B æqualis semi-transuerso B D, habebit G B ad B E minorem rationem, quàm semi-rectum ad semi-transuersum, vel quàm rectum F B ad transuersum B D. Diuidatur ergo B E in H, ita vt G H ad H E, [h] sit vt rectum F B ad B D transuersum, & per H agatur ordinata H I, & I L sectionem contingens, & axi occurrens in L, iungaturque G I. Dico G I esse *MAXIMAM*. h 16. h.

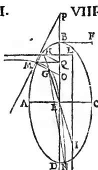
Cum sit enim G H ad H E, vt F B ad B D, sumpta communi altitudine H L erit rectangulum G H L ad E H L, vt F B ad B D, vel vt [i] quadratum G I H ad idem rectangulum E H L, quare rectangulum G H L æquale est quadrato G H, estque H I perpendicularis ad G L; ergo angulus G I L rectus erit, estque I L sectionem contingens in L, à quo ducta est I G perpendicularis, & minori axi in G, occurrens, quare ipsa G I [l] erit *MAXIMA*, & est G K æqualis G I: ergo ex G duæ erunt *MAXIMAE*. *MI-* i 37. primi conic. l 11. h.

NIMA

a 9. huius ad num.4. *NIMA* verò in hoc casu, tum in quarta, tum in quinta figura est a ipsa GD; nisi punctum G cadat in ipso D; tunc enim *MINIMA* abit in punctum.

8. At, si, vt in sexta figura, quando interuallum G B minus est dimidio BE, punctum G cadat inter B, & E, tunc si concipiatur D esse Ellipsis verticem, reliquum interuallum DG, vel erit non minus, vel minus dimidio B F, quo in casu duæ *MAXIMAE* reperientur ad partem peripheriæ ADC: eadem constructione, & demonstratione, ac ad num.6.& 7. huius, & reliqua G B erit *MINIMA*, &c.





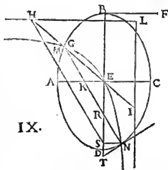
9. Si denique datum punctum G fuerit inter semiaxes, aut extra sectionẽ, vt in septima figura; vel intra, vt in octaua; vel in ipsa sectione, vt in nona. Iungatur E G, quæ hinc inde producatur, & fiat, vt transuersum D B ad rectum BF, b ita EH ad HG, ac ita G I ad I E, & ex H, I, ducantur H L, minori axi A C, & I L maiori D B parallelę, quę simul occurrent in L, & in angulo H L I per punctum E (quod est centrum Ellipsis) describatur c Hyperbole M G E N, quæ necessariò d transibit per G (cum segmenta GH, EI rectæ HI applicatæ in angulo asymptotali H L I, sint ęqualia,) & in duobus tantùm punctis M, N, Ellipsis peripheriam e secabit. Dico has intersectiones dare puncta quæsita: hoc est iunctam G N in septima, octaua, & nona figura esse *MAXIMAM*, & G M *MINIMAM*, in septima, & octaua figura, tantùm, quoniam in nona ipsa *MINIMA* abit in punctum.

b Coroll. 16. h.

c 4. secundi conic.

d 17. h.

e 18. h.



Quò autem ad *MINIMAM* ostendendam. Ducatur ex M, Ellipsim contingens MP maiori axi occurrens f in P; appliceturque MQ.

f 3. primi conic.

Et quoniam in angulo asymptotali H L I sumptum est punctum Q, extra

tra sectionem, à quo ductæ sunt QM, QE asymptotis parallelæ, & Hyperbolæ occurrentes in M, E, & ab altero occursuum E, ducta est EGH, secans Hyperbolen in G, & asymptoton HL in H, erunt iunctæ HQ, MGO [a] inter se parallelæ; quare in triangulo QEH, recta GM, quæ basi HQ æquidistat, producta conueniet cum latere EQ, vt in O; eritque EQ ad QO, vt EH ad HG, hoc est vt transuersum AB ad rectum BF, sed EQ ad QO, sumpta communi altitudine QP, est vt rectangulum EQP ad rectangulum OQP, ergo rectangulum EQP ad OQP erit vt transuersum ad rectum, vel vt [b] idem rectangulum EQP ad quadratum QM; vnde rectangulum OQP, æquale est quadrato QM, estque QM ipsi OP perpendicularis, ergo angulus OMP [c] rectus est, & in septima figura, qui ei deinceps est GMP rectus erit, sed est GM extra sectionem, contingenti MP perpendicularis: quare GM erit [d] *MINIMA*. At, in octaua figura, MP Ellipsim contingit, & ei perpendicularis MG est intra Ellipsim, sed non excedit interceptam MO inter contactum, & maiorem axim, quare GM erit [e] *MINIMA*.

[a] 19. h.
[b] 37. primi conic.
[c] 203. Sept. Pappi.
[d] 10. h.
[e] 11. h. ad num. 1.

Quod tandem in quouis prædictorum schematum, ducta GN sit *MAXIMA*, ita ostendetur, sed in nona tantùm figura, ne in reliquis noua linearum, & characterum appositio confusionem pariat.

Secet ergo GN semi-axim minorem AE in K, & maiorem ED in R, applicetur NS, contingens agatur NT, iungaturque SH.

Et cum à puncto S, & in angulo asymptotali HLI intra sectionem ductæ sint SE, SN asymptotis parallelæ, Hyperbolæ occurrentes in E, N, & ab altero occursuum E ducta sit EGH, Hyperbolen secans in G, & asymptoton in H, erunt iunctæ SH, NRG [f] inter se parallelæ; quare in triangulo HES, erit ES ad SR, vt EH ad HG, vel vt transuersum DB [g] ad rectum BF, vel vt rectangulum EST ad quadratum SN, sed ES ad SR, est vt idem rectangulum EST ad rectangulum RST, ergo quadratum SN æquale est rectangulo RST, ex quo angulus RNT rectus erit, sed TN Ellipsim contingit in N, estque NG maior intercepta NK inter contactum, & minorem axim, quare GN omnino erit [h] *MAXIMA* quæsita. Quod erat faciendum.

[f] 19. h.
[g] 37. primi conic.
[h] 11. h. ad num. 2.

MONITVM.

De inuentione MAXIMARVM à puncto dato ad vniuersam Parabolæ, vel Hyperbolæ peripheriam hactenus nihil egimus, cum manifestè pateat ad eas educi minimè posse lineas tantæ longitudinis, quin ipsis maiores, & maiores adhuc in infinitum reperiantur; eò quod sectiones ipsæ sint infinitæ extensionis: itaque consultò de hac re demonstrationem omisimus, cum hæc in promptu satis sit. Verum si quærantur MAXIMAE, ducibiles à puncto extra sectionem dato, ad conuexas tantùm quarumlibet coni-sectionum peripherias: si punctum fuerit in axe producto, ex eo ductæ lineæ contingentes æquales erunt, & MAXIMAE ad ipsius sectionis conuexam peripheriam. Si autem punctum fuerit extra axim Parabolæ, vel Hyperbolæ, sed intra angulum ab asymptotis factum,

factum, tunc ex dictis binis contingentibus, quæ ad partem axis ducitur semper altera contingente ad oppositam axis partem minor erit, atq; hæc erit MAXIMA. Si verò punctum fuerit extra Ellipsim inter axes, tunc contingens ad partem maioris axis ducta, minor erit altera contingente ad partem minoris, pariterque hæc erit MAXIMA ad conuexam Ellipsis peripheriã. Quæ omnia facili negotio demonstrabuntur si animaduertatur, quod in quocunque triangulo, cuius vnum latus altero sit maius, hoc ipsum esse MAXIMUM linearum omnium à vertice anguli ab ipsis lateribus comprehensi, ad puncta basis prædicti trianguli ducibilium, (tale enim triangulum est, quod à prædictis contingentibus tanquam lateribus, & à recta puncta contactuum iungente, tanquam basi efficitur, in quo idem maius latus, siue contingentium maior eò magis erit MAXIMA ad inclusam sectionis peripheriam.) Si tandem punctum fuerit in angulo ad verticem asymptotalis, aut in asymptotis eum comprehendentibus, tunc vllam contingentium ducere impossibile est, & ducibiles lineæ ad conuexam Hyperbolæ peripheriam semper augentur, ideoque non datur MAXIMA; & cum est in altero angulorum, qui deinceps sunt asymptotali, vel in ipsis asymptotis Hyperbolen continentibus, tunc vnica tantum contingens linea ab eo duci potest, & hæc ad partem axis, quæ erit MAXIMA ad eandem partem ducibilium; sed ad oppositam, ipsæ ducibiles ad Hyperbolæ conuexam peripheriam perpetuò pariter augentur. Sed in re haud difficilis inuestigationis ne amplius quæso immoremur.

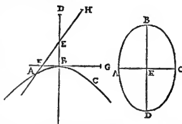
THEOR. XVI. PROP. XXIV.

Transuersorũ laterũ in Hyperbola, MINIMVM est axis; in Ellipsi autẽ, MAXIMVM est axis maior, MINIMVM verò axis minor.

SIt Hyperbole A B C, cuius axis transuersus D B, centrum E. Dico D B omnium transuersorum esse *MINIMVM*.

Sit quodcunque aliud H E A, & per B axi applicetur G B F, quę axi perpendicularis erit, ac sectionem continget in B. Erit ergo perpendicularis E B *MINIMA* ad [a] peripheriam A B C: quare E B minor erit E A, & duplum D B maius duplo H A: ex quo D B erit transuersorum *MINIMVM*.

[a] 10. h.



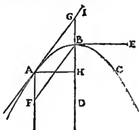
In Ellipsi verò A B C, cuius centrum E, & B D sit axis maior, & A C minor: patet B D esse transuersorum *MAXIMVM*, & A C *MINIMVM*, ex primo Coroll. 86. primi huius. Quod erat, &c.

THEOR. XVII. PROP. XXV.

Rectorum laterum in Parabola, MINIMVM est rectum axis.

ESto Parabole A B C, cuius axis B D, rectum B E. Dico ipsum B E reliquorum rectorum esse *MINIMVM*. Sit quælibet alia diameter A F, quæ axi B D [a] æquidistabit, sitque ad A contingens A G, & B F ipsi A G æquidistans, quæ diametro A F erit ordinatim applicata; tandem axi applicetur A H, sumaturque A I æqualis recto diametri A F. [a ex 46. pr. conic.]

Iam, ob contingentem AG, cum sit H B æqualis B G, & F A eidem B G æqualis, erit H B æqualis F A: rectangulum ergo H B E ad F A I, vel quadratum [b] H A, ad quadratum B F, vel ad quadratum G A, erit vt B E ad A I, sed est quadratum A H minus quadrato A G, siue recta A H minor recta A G, cum acutus angulus A G B minor sit recto A H G, quare B E rectum, minus erit recto A I: eademque ratione demonstrabitur B E quocunque alio recto minus esse: quare B E rectum axis, est *MINIMVM*. Quod erat ostendendum. [b Coroll. primæ 1. huius.]



COROLL.

HInc patet, data quacunque Parabolæ diametro, si quæratur ratio inter eius rectum, rectumque axis, hanc ipsam reperiri inter quadratum contingentis interceptæ, à vertice datæ diametri vsque ad axim, & quadratum axi semi-applicatæ ab eodem vertice.

Verùm si omnium rectorum continuam proportionem, in lineis, & veluti ipsorum quandam propagationem ante oculos ponere expetemus, id à proximo Theoremate addiscere liceat.

THEOR. XIIX. PROP. XXVI.

Recta latera diametrorum in Parabola, sunt inter se in ratione linearum ex puncto axis remoto à vertice per quadrantem sui recti, ad ipsarum diametrorum vertices eductarum.

ESto Parabole A B C, cuius axis B D rectum B I, ac eius quarta pars sit B D, & quælibet aliæ diametri sint A E, F G, &c. quarum vertices iungantur rectis D B, D A, D F, &c. Dico, tùm axis, tùm prædictorum diametrorum latera esse inter se, vt sunt ipsæ eductæ D B, D A, D F, &c.

a 88. primi huius. b 90. primi huius. c 35. primi conic. Erigatur ex A contingenti A G perpendicularis A L, quæ axi[a] occurret in L, cui applicata A H, erit intercepta L H [b] æqualis dimidio recti B I, hoc est dupla interuallo D B, (cum punctum D distet à vertice B per quartam recti lateris partem ex hypotesi) & H G dupla [c] est quoq; G B, quare, & tota L G dupla est tota G D, siue L D æqualis D G, estque angulus L A G rectus, quare si cum centro D, interuallo G, vel L circulus describatur, ipse omnino transibit per A; vnde D A item æqualis erit ipsis D G, D L, siue L G erit dupla D A. Et cum rectum axis B D, ad rectum diametri A E, sit vt quadratum [d] A H ad A G, vel ob triangulorum similitudinem, vt quadratum A L ad L G, vel vt recta H L ad rectam L G (cum L A sit media proportionalis inter G L, L H) sumptis harum subduplis, erit rectũ axis ad rectum diametri A E, vt D B dimidium H L ad D A dimidium L G. Quod erat demonstrandum. Vocatur autem punctum D, focus Parabolæ.

d Coroll. 24. huius.

COROLL. I.

Hinc cõstat, omnes eductas à foco ad Parabolę peripheriam, ęquari quartæ parti rectorum, earum diametrorum, quarum vertices sint termini, quibus ipsæ eductæ sectioni occurrunt: rectum enim axis B D ad rectum diametri A E, est vt D B ad D A, estque D B quarta pars recti B I, quare, & D A erit quarta pars recti lateris diametri A E, & D F quadrans recti, diametri F R. Vnde quò diametri ab axe remotiores fuerint, eò ipsarum recta maiora erunt: nam est D F maior D A, &c.

COROLL. II.

Patet etiam, quamlibet eductam ex foco, ęquari aggregato ex interuallo foci ab axis vertice, & segmento axis inter verticem, & applicatam ex occursu eductæ cum sectione. Ostensa est enim D A æqualis D G, quæ æqualis est aggregato G B, cum B D, vel H B cum B D.

SCHOLIVM.

Cvm demonstratum sit D G æqualem esse D A, erit angulus D G A, vel parallelarum externus E A M, æqualis angulo D A G, sed M A G Parabolen contingit in A, quare ex Opticæ legibus, si E A fuerit radius [e] incidens ad concauam peripheriam A B C, ipse A D erit reflexus, atque omnes radij axi Parabolę æquidistantes in punctum D coibunt; vnde si ipsi fuerint sonori, aut lucidi, simulque calidi, ibi sonus, aut lux,

e Breuiùs, & clariùs quàm à Vitellione in 41. 9.

aut lux, & calor, augebitur: & si à Solis corpore directè emanantes, ibi fiet incensio, à qua punctum D foci nomen ademptum fuit.

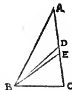
Si autem incidentes radij axi paralleli R F, O A à quadam recta N P axi ordinatim ducta secentur, erunt aggregata incidentium cum earum reflexis, simul æqualia.

Nam cum A D, ex præcedenti Coroll. 2. sit æqualis aggregato H B, cum B D, additis hinc inde æqualibus A O, H P, proueniet aggregatum O A, A D, æquale aggregato P B cum B D, itemque aggregatum R F, cum F D ostendetur æquale eidem aggregato P B cum B D, quare aggregata O A D, R F D æqualia erunt: quod acutissimè quidem à perspicacissimo Caualerio, in eius Speculo Vstorio animaduersum fuit.

LEMMA VI. PROP. XXVII.

Si in triangulo A B C, latus A C, ita sectum fuerit in D, vt rectangulum A C D æquale sit quadrato basis B C. Dico, iuncta B D, angulum A B C æqualem esse angulo B D C: si verò A C D rectangulum maius fuerit prædicto quadrato, & angulus angulo maior erit: & è contra.

NAm cum fuerit rectangulum A C D æquale quadrato C B, erit A C ad C B, vt B C ad C D, quare triangula A B C, B D C, ad communem angulum A constituta, similia erunt, ob idque angulus A B C æqualis angulo B D C.



At cum rectangulum A C D maius fuerit quadrato C B, facto rectangulo A C E æquali quadrato C B, erit C E minor C D, ergo iuncta B E, erit angulus A B C, æqualis angulo B E C, sed B E C maior est angulo B D C, quare A B C omninò maior erit angulo B D C.

Si tandem rectangulum A C D minus fuerit quadrato C B, non absimili modo ostendetur angulum A B C minorem esse angulo A D C. Quod vltimò erat, &c.

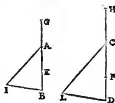
LEMMA VII. PROP. XXVIII.

Si duæ rectæ lineæ A B, C D proportionaliter sectæ fuerint in E, F, & homologis segmentis A E, C F æqualia sumantur A G, C H, & super A B, C D descripta sint similia triangula I A B, L C D. Dico vt rectangulum G B E, ad quadratum B I, ita esse rectangulum H D F ad quadratum D L.

CVm sit enim A E ad E B, vt C F ad F D, erit conuertendo, & componendo B A ad A E, vt D C ad C F, vel quadratum B A ad A E,

vt qua-

vt quadratum D C ad C F, & per conuersionem rationis, quadratum A B ad rectangulum G B E, vt quadratum C D ad rectangulum H D F, & conuertendo, rectangulum G B E ad quadratum A B, vt rectangulum H D F ad quadratum C D, & quadratum A B ad B I, est vt quadratum C D ad D L, ob triangulorum I A B, L C D similitudinem; quare ex æquo rectangulum G B E ad quadratum B I, erit vt rectangulum H D F ad quadratum D L. Quod erat, &c.



LEMMA VIII. PROP. XXIX.

Si quatuor magnitudinum eiusdem generis, prima A ad secundam B maiorem habuerit rationem, quàm tertia C ad quartam D E, sitque prima minor tertia, erit secunda minor quartæ.

Fiat, vt A ad B, ita C ad D F, & cum A ad B habeat maiorem rationem, quàm C ad D E, habebit quoque C ad D F maiorem quàm ad D E, vnde D F erit minor D E, & est A ad B, vt C ad D F, erit permutando A ad C, vt B ad D F, estque A minor C, ergo B erit minor D F, & D F ostensa est minor D E, quare B eò ampliùs erit minor D E. Quod erat, &c.



THEOR. XIX. PROP. XXX.

Rectorum laterum in Hyperbola, cuius axis transuersus non sit minor eius recto latere, MINIMVM est rectum axis.

Esto Hyperbole A B C, cuius centrum D, axis transuersus E B, qui primò sit minor recto B F. Dico rectum B F esse rectorum laterum *MINIMVM*.

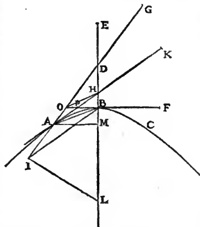
Sit quæcunque alia transuersa diameter G D A, in sectione producta ad I, cuius rectum sit A K ex A contingenter applicatum, & axi occurrens in H; & sit B I æquidistans A H, quæ ad diametrum G A I erit ordinatim ducta, atque ex I sit I L ipsi D I perpendicularis, ex A verò A M axi applicata, cui ex vertice B sit parallela, vel contingens B O, secans A H in P, iunganturque A B, O H.

a 25. primi conic. Iam cum rectangulum D M H ad quadratum M A, sit [a] vt E B ad B F, sitque E B maior B F, erit rectangulum D M H maius quadrato M A, quare

quare angulus D A M, siue in simili triangulo D L I, angulus D L I erit maior * angulo A H M, siue angulo parallelarum externo I B L: cum igitur in triangulo I B L sit angulus I B L minor I L B, erit latus I L minus latere I B. * 27. h.

Præterea, cum triangula A P O, B P H *a* sint æqualia, addito communi triangulo A P B, erunt triangula A O B, A H B super eadem basi A B inter se æqualia, quare O H æquidistabit A B, ideoque vt D O ad O A, vel D B ad B M, ita D H ad H B, vel D A ad A I. Sunt ergo D M, D I proportionaliter sectæ in B, A, quibus additæ sunt D E, D G, æquales ipsis D B, D A, vtraq; vtrique, suntq; rectangula triagula D M A, D I L similia inter se, quare rectangulum E M B ad quadratũ M A, *b* siue E B ad B F, est vt *c* rectãgulum G I A ad quadratum I L, cumque sit I L minor I B, erit quadratum I L minus quadrato I B, ideoque rectangulum G I A ad quadratum I L, hoc est transuersum E B ad rectum B F, habebit maiorem rationem, quàm rectangulum G I A ad quadratum I B, vel quàm *d* transuersum G A ad rectum A K; ergo prima E B, ad secundam B F, maiorem habet rationem quàm tertia G A ad quartam A K, sed est prima E B minor *e* tertia G A, ergo, & secunda B F erit *f* minor quarta A K; & sic de reliquis diametrorum rectis lateribus: quare B F, rectum axis transuersi, est *MINIMVM*, &c.

a 1. tertij conic.



b 21. primi conic.
c 28. h.
d 21 primi conic.
e 24. h.
f 29. h.

Si autem axis E B æqualis fuerit eius recto B F; cum demonstratum sit rectangulum G I A ad quadratum I L esse vt transuersus axis E B ad rectum B F; patet rectangulum quoque G I A æquari quadrato I L, sed quando E B æquatur B F, rectangulum etiam D M H æquatur *g* quadrato M A, & tunc angulus D A M, æqualis est *h* angulo A H M, ergo etiam angulus D L I æquabitur angulo I B L, hoc est linea I B æqualis erit I L, sed erat rectangulum G I A æquale quadrato I L, ergo idem rectangulum G I A æquabitur quadrato I B, siue transuersa diameter A G, eius recto A K æqualis erit, & hoc semper, quæcunque sit ducta transuersa diameter præter axim.

g 37. primi conic.
h 27. h.

Cum ergo Hyperbole fuerit rectangula æquilatera, ad aliam quoque diametri applicationem æquilatera erit, sed axis est transuersorum *i* *MINIMVM*: ergo in Hyperbola, cuius axis transuersus eius rectum adæquet, rectum axis aliorum rectorum est *MINIMVM*. Quod erat, &c.

i 24. h.

SCHO-

SCHOLIVM.

CVm fuerit axis E B minor ſuo recto B F, iiſdem rationibus oſtendetur rectangulum D M H minus eſſe quadrato M A, & angulum D A M, ſiue D L I minorem eſſe angulo A H M, ſiue angulo I B L, ac propterea latus I L maius eſſe latere I B, ideoque rectangulum G I A ad quadratum I L, ſiue tranſuerſum axem E B ad rectum B F, minorem habere rationem, quàm idem rectangulum G I A ad quadratum I B, vel quàm tranſuerſa G A ad rectum A K.

COROLL.

EX his patet, in Hyperbola, cuius axis tranſuerſus ſit maior recto, maiorem eſſe rationem axis ad proprium rectum, quàm cuiuslibet aliæ tranſuerſæ diametri ad proprium rectum.

Et ſi axis, ſuo recto æqualis fuerit, axem ad proprium rectum eandem rationem habere, quàm quęlibet alia tranſuerſa ad proprium rectum, ob ęqualitatem.

Si denique axis ſuo recto fuerit minor, minorem eſſe rationem inter axem, ac proprium rectum, quàm inter quamcunque aliam diametrum propriumq; rectum. Sed hæc ſunt præter inſtitutum noſtrum, & fuſim à præclariſſimo Mydorgio pertractata.

Hinc, humanum eſſe errare deprehenditur, cum propoſitio 70. de Hyperbola Gregorij à Sancto Vincentio, contrarium his falsò concludat ex præcedenti *69.* in qua (pace tanti Viri dictum ſit) neſcio quo fato hallucinatus eſt.

LEMMA IX. PROP. XXXI.

Si quatuor magnitudinum, prima A ad ſecundam B minorem habuerit rationem, quàm tertia C D ad quartam E, ſitque prima maior ſecunda, erit tertia maior quarta.

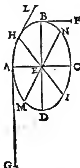
FIat enim vt A ad B, ita C F ad E; cum ergo A ad B minorem habeat rationem quàm C D ad E, habebit quoque C F ad E, minorem quàm C D ad E; quare C F erit minor C D. Et cum ſit A ad B vt C F ad E, dataque ſit A, maior B, erit C F maior E, & eò magis C D maior eadem E. Quod erat, &c.



THEOR. XX. PROP. XXXII.

Rectorum laterum in Ellipsi MAXIMVM est rectum minoris axis, MINIMVM verò rectum maioris.

ESto Ellipsis A B C D, cuius centrum E, axis minor A C, rectum A G, & axis maior B D, rectum B F. Dico A G rectorum omnium esse *MAXIMVM*; BF verò *MINIMVM*.



Sit enim quælibet alia transuersa diameter H I, cuius rectum H L, sitque diameter M N ipsi H I coniugata, quæ media proportionalis erit inter I H, & H L; vnde quadratum ipsius M N æquabitur rectangulo IHL, vti etiam quadratum A C æquatur rectangulo D B F, & quadratum B D rectangulo CAG; sed est quadratum A C, minus quadrato MN, cum sit transuersa A C minor [a] transuersa M N, ergo rectangulum D B F minus erit rectangulo I H L, quare B D ad H I minorem habebit rationem quàm H L ad B F, estque B D maior [b] H I, ergo & rectum H L erit maior [c] recto BF.

a 24. h.

b ibidem.
c 31. h.

Præterea, cum sit M N minor [d] D B, erit quadratum MN minus quadrato DB, siue rectangulum IHL minus rectangulo CAG, vnde I H ad C A minorem habebit rationem quàm A G ad HL, sed est IH maior [e] CA, ergo rectum AG erit maius recto HL. Cum sit ergo A G maior H L, & H L maior B F erit A G adhuc maior B F. Quare A G rectum minoris axis est *MAXIMVM*, B F verò maioris axis rectum, est *MINIMVM*. Quod erat demonstrandum.

d 24. h.
e ibidem.
f 31. h.

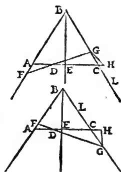
PROBL. IV. PROP. XXXIII.

A puncto dato intra angulum rectilineum rectam applicare, cuius rectangulum segmentorum sit MINIMVM.

ESto ABC angulus rectilineus, in quo datum punctum sit D. Oportet ex D rectam in angulo applicare, ita vt rectangulum sub ipsius segmentis sit *MINIMVM*.

Ducatur BE angulum ABC bifariam secans, cui per D recta perpendicularis applicetur ADC. Dico hanc ipsam quæsitum soluere.

Cum enim in triangulis BEA, B E C anguli ad E sint recti, & ad B facti æquales, erunt reliqui anguli BAE, BCE æquales, & qui infra A C, basim trianguli æquicruris ABC, pariter æquales.



Iam ducatur per D quælibet alia F D G. Et cum in triangulo D G C ſit externus angulus D C L maior interno D G C, fiat angulus D G H ipſi D C L, ſiue D A F æqualis, eſtque angulus G D C æqualis angulo A D F, & duo ſimul D A F, A D F minores ſunt duobus rectis, ergo & duo D G H, G D C erunt duobus rectis minores, ſiue G H cum D C producta conueniet, vt in H, eritque reliquus angulus H in triangulo D H G æqualis reliquo F in triangulo D F A: quare huiuſmodi triangula ſimilia erunt, & circùm æquales angulos ad D habebunt latera proportionalia, ſiue vt A D ad D F, ita G D ad D H, vnde rectangulum A D H æquale erit rectangulo F D G, ideoque rectangulum A D C minus erit rectangulo F D G, & hoc ſemper vbicunque applicata ſit per D, recta F D G præter A D C. Quare rectangulum ſub ſegmentis A D, D C eſt *MINIMVM* quæſitum. Quod erat faciendum.

PROBL. V. PROP. XXXIV.

A puncto intra coni-ſectionem dato rectam applicare, cuius rectangulum ſegmentorum ſit MINIMVM. In Ellipſi verò, & MAXIMVM rectangulum reperire.

ESto primùm A B C Parabole, vel Hyperbole, vt in prima figura, cuius axis B D, & datum intra ipſam punctum ſit E. Oportet per E rectam ſectioni applicare, ita vt rectangulum ſub eius ſegmentis ſit *MINIMVM*.

Applicetur per E recta A E D C axi ordinatim ducta. Dico hanc ipſam quæſitum ſoluere: ſiue rectangulum A E C eſſe *MINIMVM*.

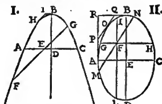
Nam applicata per E qualibet alia inclinata F E G: non abſimili modo, ac in 26. ſecundi conicorum, demonſtrabitur applicatas A C, F G intra ſectionem ſe mutuò ſecantes in E, in ipſo E nunquam bifariam ſimul ſecari, ex quo ipſarum applicatarum diametri diſiunctæ erunt inter ſe, ideoque B vertex portionis A B C non erit vertex portionis F H G: is ergo ſit H; ducaturque ex B ſectionem contingens B I, ſiue applicatę A C æquidiſtans; itemque ex H recta contingens H I, ſiue F G parallela, quę contingentes ſimul conuenient [a] in I. Erit ergo rectangulum A E C, ad rectangulum G E C, [b] vt quadratum B I ad quadratum H I; ſed eſt contingens B I, ad axis verticem, minor [c] contingente H I, ergo & quadratum quadrato minus erit, ſiue rectangulum A E C minus rectangulo F E G, & hoc ſemper quæcunque ſit quæ per E applicatur diuerſa ab applicata A C, ergo rectangulum A E C eſt *MINIMVM* quæſitum.

a 58. primi h.
b 16 tertij conic.
c 87. primi huius.

Sit

Sit verò ABCD in secunda figura Ellipsis, cuius axis maior BD, minor AC, centrum E, & punctum intra datum sit F. Oportet per F rectas in sectione applicare quales inuenire proposuimus.

Sit per F maiori axi BD ordinatim ducta GFH, minori verò sit IFL. Dico rectangulum GFH esse *MINIMVM*, *MAXIMVM* verò IFL.



Sit quælibet alia per F applicata MFN, & portionis MON sit vertex O, atque ex axium verticibus A, B, vti etiam ex O agantur contingentes AP, BQ, POQ, quæ simul occurrent [a] in R, P, Q. Erit ergo rectangulum GFH ad IFL, [b] vt quadratum BR ad quadratum AR, sed est contingens BR, [c] minor AR, siue quadratum BR minus quadrato AR, ergo, & rectangulum GFH minus erit rectangulo IFL. [a] 58. primi h. [b] 16. tertij conic. [c] 87 primi huius.

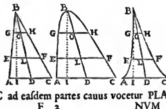
Præterea rectangulum GFH ad MFN est vt quadratum BQ ad quadratum OQ, sed est contingens BQ [d] minor contingente OQ, siue quadratum BQ minus quadrato OQ, ergo rectangulum GFH minus est rectangulo MFN, & hoc semper vbicunque cadat applicata MFN: quare rectangulum GFH est *MINIMVM* quæsitum. [d] ibidem.

Demùm cum rectangulum IFL ad NFM, sit [e] vt quadratum AP ad quadratum QP, sitque contingens AP [f] maior contingente QP erit quadratum AP maius quadrato QP, ergo rectangulum quoque IFL maius erit rectangulo NFM, & hoc semper vbicunque sit ducta NFM inter applicatas IFL, GFH quare rectangulum IFL est *MAXIMVM* quæsitum. Quod vltimò inuenire propositum fuit. [e] 16. tertij huius. [f] 87. primi huius.

DEFINITIONES.

I.

PLANVM ACVMINATVM REGVLARE, vel ACVMINATVM tantùm voco omnem figuram planam, circa diametrum, in alteram partem deficientem, & cuius perimeter sit in easdem partes cauus.

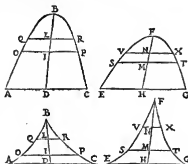


Hoc est figura plana ABC, in qua omnes rectæ lineæ AC, EF, GH, &c. à figurę perimetro terminatæ, ac inter se æquidistantes, à quadam recta BD bifariam secentur, & in alteram partem, vt puta ad B, continuò decrescant, donec abeant in punctum B, sitque earum perimeter AGBHC ad easdem partes cauus vocetur PLA-

NVM ACVMINATVM REGVLARE, vel potius (breuitatis causa) ACVMINATVM, cuius terminus B vocetur VERTEX; & æquidistantes AC, EF, GH, &c. quæ à B D bifariam diuiduntur, dicantur APPLICATÆ ad ipsam B D, quæ vocetur DIAMETER, vel AXIS quando ipsa perpendiculariter secet easdem applicatas. A C verò dicatur BASIS ACVMINATI; & B I, quæ à vertice super basim ducitur perpendicularis, ACVMINATI ALTITVDO nuncupetur.

II.

PLANA ACVMINATA REGVLARIA PROPORTIONALIA, vel tantùm ACVMINATA PROPORTIONALIA dicantur illa, quorum omnes applicatæ à punctis eorum diametros proportionaliter diuidentibus, sint quoque inter se proportionales,



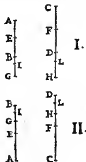
Sint nempe duo Acuminata Regularia ABC, EFG, super bases AC, EG, qualia in præcedenti definitione explicauimus, quorum diametri BD, FH proportionaliter sectæ sint in quotcunque punctis I, M; L, N, &c. siue sit BI ad ID, vt FM ad MH, & BL ad LD, vt FN ad NH, &c. atque in punctis inter sectionum applicatæ sint OP, QR; ST, VX, quę ex homologis punctis sint ad inuicem proportionales, hoc est vt AC ad EG, ita OP ad ST, & QR ad VX, &c. huiusmodi figuræ vocentur PLANA ACVMINATA REGVLARIA PROPORTIONALIA, vel tantùm ACVMINATA PROPORTIONALIA.

LEM-

LEMMA X. PROP. XXXV.

Si duæ rectæ lineæ terminatæ A B, C D bifariam sectæ fuerint in E, F, & proportionaliter producantur, vt in prima figura; vel diuidantur, vt in secunda, in G, H, ita vt sit A B ad B G, vt C D ad D H, partesq; adiectæ, vel demptæ B G, D H iterum proportionaliter secentur in I, L, ita vt B I ad I G, sit vt D L ad L H. Dico rectangulum A G B ad rectangulum A I B, esse vt rectangulum C H D ad rectangulum C L D.

NAm cum sit A B ad B G, vt C D ad D H, erit in prima figura componendo, in secunda verò diuidendo A G ad G B, vt C H ad H D, & est B G ad G I, vt D H ad H L (cum diuidendo factum sit B I ad I G, vt D L ad L H) ergo ex æquo A G ad G I erit vt C H ad H L, & in prima figura per conuersionem rationis, in secunda verò, componendo, per conuersionem rationis, & conuertendo, erit G A ad A I, vt H C ad C L: & cum superiùs demonstratum sit esse B G ad G I, vt D H ad H L, erit, per conuersionem rationis, G B ad B I, vt H D ad D L. Iam rectangulum A G B ad A I B habet rationem compositam ex ratione G A ad A I, vel ex H C ad C L, & ex ratione G B ad B I, vel ex H D ad D L, sed ex ijsdem rationibus H C ad C D, & H D ad D L componitur ratio rectanguli C H D ad rectangulum C L D, quare vt rectangulum A G B ad A I B, ita rectangulum C H D ad C L D, Quod erat, &c.



THEOR. XXI. PROP. XXXVI.

Quælibet Portiones eiusdem, vel diuersarum Parabolarum sunt Acuminata Proportionalia.

Item, Portiones eiusdem, vel diuersarum Hyperbolarum, Ellipsium, aut Circulorum; quarum tamen segmenta diametrorum in ijsdem portionibus intercepta ad suas semi-diametros eandem homologam habeant rationem, sunt pariter inter se Acuminata proportionalia.

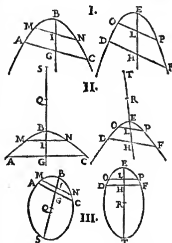
SInt primò duę portiones A B C, D E F eiusdem, vel diuersarum Parabolarum in prima figura, quarum bases sint A C, D F. Dico ipsas por-

ſas portiones eſſe Acuminata Proportionalia.

Repertis enim earum diametris BG, EH, diuidantur ipſæ proportionaliter in I, L, applicenturque MIN, OLP. Cum ſit ergo GI ad IB, vt HL ad LE, erit componendo GB ad BI, hoc eſt quadratum a AC ad MN, vt HE ad EL, ſiue vt quadratum DF ad OP, ideoque & applicata AC ad MN, vt applicata DF ad OP. Quare, ex ſecunda præcedentium definitionum, ipſæ portiones ABC, DEF erunt Acuminata Proportionalia. Quod primò, &c.

a 20. primi conic.

Præterea ſint ABC, DEF duæ portiones eiuſdem, vel diuerſarum Hyperbolarum, vt in ſecunda figura, vel Ellipſium, aut circulorum, vt in tertia, quarum baſes AC, DF, & diametrorum ſegmenta in ipſis intercepta ſint BG, EH, quæ vſque ad ſectionum centra Q, R producantur, & ſit vt GB ad BQ, ita HE ad ER. Dico item has portiones ABC, DEF eſſe inter ſe Acuminata Proportionalia.



Nam diuiſis diametris BG, EH proportionaliter in I, L, per I, L applicentur MIN, OLP, & productis ſemi-diametris BQ, ER ſumantur cis æquales QS, RT, ita vt SB, TE ſint ſectionum diametri.

Iam cum ſit GB ad BQ vt HE ad ER, erit conuertendo, & ſumptis antecedentium duplis SB ad BG, vt TE ad EH, ſuntq; SB, TE biſariam ſectæ in Q, R, & partes adiectæ, in ſecunda figura, vel demptæ in tertia BG, EH proportionaliter diuiſæ ſunt in I, L, ergo rectangulum SGB ad SIB, ſiue b quadratum AC, ad MN, erit vt c rectangulum THE, ad TLE, vel vt d quadratum DF ad OP, nempe applicata AC ad MN erit vt applicata DF ad OP, & permutando AC ad DF, vt MN ad OP, & hoc ſemper de quibuslibet applicatis per puncta diametrorum BG, EH ipſas proportionaliter ſecantia, quare, ex definitione ſecunda, ipſæ portiones ABC, DEF erunt Acuminata proportionalia. Quod vltimò demonſtrandum erat.

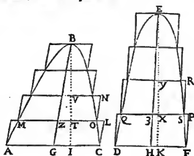
b 21. primi conic.
c 35. h.
d 21. primi conic.

THEO-

THEOR. XXII. PROP. XXXVII.

Proportionalia Acuminata, quorum bases eorum altitudinibus sint reciprocè proportionales, sunt inter se æqualia.

SInt duo proportionalia Acuminata A B C, D E F, quorum diametri sint BG, EH, altitudines verò B I, E L, quæ inter se reciprocam habeant rationem basium A C, DF; siue sit vt A C ad D F, ita EL ad BI. Dico huiusmodi Acuminata inter se æqualia esse.



Si enim possibile est, sit alterum ipsorum, nempe A B C reliquo D E F minus, & per continuam diametri B G bisectionem, iuxta vulgatam methodum, circumscribatur ipsi A B C, figura ex parallelogrammis constans æqualium altitudinum A L, MN, &c. quorum altitudines I T, TV, &c. æquales erunt (cum altitudo B I in tot æquales partes diuidatur ab æquidistantibus parallelogrammorum basibus A C, MO, &c. in quot partes diameter B G secta fuit) huiusmodi autem circumscripta figura ex parallelogrammis, acuminatum A B C superet minori excessu, quò acuminatum D E F ponitur excedere idem acuminatum A B C, adeo vt ipsa circumscripta A B N L C sit adhuc minor acuminato D E F, cui circumscribatur item figura D E R P F ex totidem parallelogrammis D P, QR &c. æqualium altitudinum K X, X Y, &c.

Iam, cum sit basis A C ad D F, vt altitudo E K ad B I, vel vt submultiplex K X ad æque-submultiplicem I T, erit parallelogrammum A L, æquale parallelogrammo D P. Et cum, ex constructione, sit G B ad B Z, vt H E ad E 3, erit, ex definitione proportionalium acuminatorum, A C ad D F, vt M O ad QS, sed A C ad D F est vt E K ad B I, ergo, & M O ad QS erit vt E K ad B I, vel vt submultiplex X Y ad æque-submultiplicem T V: parallelogrammum igitur M N æquatur parallelogrammo QR; & sic de reliquis, singula singulis: ergo vniuersa figura A B N L C æqualis erit vniuersæ D E R P F, sed figura A B N L C facta est minor acuminato D E F, quare figura D E R P F erit quoque minor eodem sibi inscripto acuminato D E F: totum parte, quod est absurdum. Nullum ergo horum acuminatorum est reliquo minus, quapropter æqualia esse inter se necesse est. Quod erat demonstrandum.

SCHO-

SCHOLIVM.

EX hac facilè elicietur methodus, qua pręcipuas quorumlibet Acuminatorum passiones ostendi possint, nempe: ipsa Acuminata à diametris bifariam secari: & Proportionalia Acuminata ęqualium altitudinum inter se esse vt bases: & (tanquam Corollarium) Acuminata proportionalia æqualium basium esse inter se vt altitudines: item duo quæcunque Acuminata proportionalia habere inter se rationem compositam ex ratione basium, & ex ratione altitudinum: & ad inscripta triangula, vel circumscripta parallelogramma eandem retinere rationem, aliaque his similia: & quod de proportionalibus Acuminatis, idem penitus euenire de similibus mensalibus proportionalium Acuminatorum, præmissa priùs harum mensalium definitione, &c. quæ omnia infinitis figurarum speciebus, ne dum hactenus tractatis Parabolis, Hyperbolis, &c. maximè conducunt. Sed hæc aliàs, quę tamen cum sint haud obscurę indagationis, & huic nostro instituto prorsus aliena, erudito Lectori sic præmonstrasse sufficiat.

LEMMA XI. PROP. XXXVIII.

Si duæ rectæ lineæ inter se æquales fuerint, & parallelæ, & ab earum extremis terminis ducantur lineæ quemlibet angulum efficientes, ab alteris autem terminis aliæ ipsis æquidistantes; hæ quoque angulum inter datas constituent, & recta angulorum vertices coniungens erit vtrique datarum æqualis, & parallela.

Si verò datæ rectæ lineæ terminatæ ad quemcunque angulum applicatæ fuerint, & vbicunque proportionaliter sectę, aut productæ, atque ab homologis earum punctis, hoc est, vel ab extremis terminis, vel ab inter-sectionum, aut productionum punctis, ductæ fuerint intra datum angulum aliæ rectæ lineæ, quæ item angulum quemlibet constituant, à reliquis verò punctis aliæ ipsis æquidistanter ducantur, hæ pariter tertium angulum efficient intra datum, & horum trium angulorum vertices in vna, eademque recta linea reperientur.

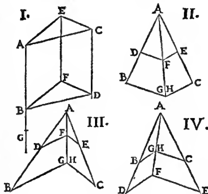
SIt, in prima figura, recta A B æqualis, & parallela ad C D, & ex terminis A, C inter eas constituatur angulus quicunque A E C ductaque B F parallela ad A E, D F verò ad C E. Dico B F, D F inter datas æquidistantes conuenire, & E F iungentem angulorum vertices, alteri A B, vel C D esse æqualem, & parallelam.

Iungantur A C, B D: & quoniam B F est parallela ad A E, erit angulus G B F æqualis angulo B A E; cumque A B sit æqualis, & parallela ad

C D, erunt

C D, erunt A C, B D æquales, & parallelæ, idcirco angulus G B D æqualis angulo B A C, ergo reliquus angulus D B F, æqualis erit reliquo C A E; eadem ratione oſtendetur angulum BDF æquari angulo ACE, & BD demonſtrata eſt æqualis ipſi A C, ergo in triangulis BFD, A E C, cum æqualia latera BD, A C æqualibus angulis adiaceant, erit tertius angulus B F D, tertio A E C æqualis, & reliqua latera B F, A E, itemque DF, C E, inter ſe æqualia, ſed ſunt quoque parallela, ob hypoteſim, ergo EF angulorum vertices iungens, erit æqualis, & parallela ad AB, vel ad CD; cadetque inter datas AB, CD, cum punctum E, ex quo ducitur ſit inter eas, ſicque angulus B F D cadet intra datas æquidiſtantes AB, CD. Quod primò oſtendere opus erat.

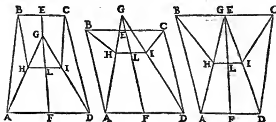
Sint verò, in reliquis tribus figuris, datæ rectæ AB, AC terminatæ angulum BAC conſtituentes, quę proportionaliter ſecentur, vel producantur in D, E; & ex punctis D, E ductæ ſint DF, EF ſibi ipſis occurrentes intra datum angulum in F, ex reliquis verò punctis BC, alię ipſis æquidiſtantes B G, CH. Dico item has intra angulum B A C inter ſe conuenire, vt in G, ac tres angulorum occurſus A, F, G in eadem recta linea reperiri.



Nam iuncta A F, & producta; cum BG ipſi DF ęquidiſtet, & AF cum DF conueniat, conueniet quoque producta cum BG, ſit ergo G punctum occurſus. Item cum CH æquidiſtet ipſi EF, & AF ſecet EF, producta ſecabit quoque CH: ſecet in H. Oſtendam puncta G, H, quæ iam in recta AF reperiri demonſtratum eſt, eſſe vnum idemque punctum rectæ AF: eſt enim in triangulo AGB vt GA ad AF, ita B A ad A D, vel, ob hypoteſim, vt C A ad A E, vel vt HA ad A F, ergo G A, & H A ſunt æquales, hoc eſt puncta G, & H non ſunt duo, ſed vnum tantùm, & in eadem recta linea in qua ſunt puncta A, F. Ergo B G, C H inter ſe conueniunt intra datum angulum, ac trium angulorum vertices ſunt in directum poſiti. Quod vltimò oſtendere propoſitum fuit.

LEMMA XII. PROP. XXXIX.

Si fuerit quodcunque quadrilaterum rectilineum A B C D, cuius opposita latera A D, B C bifariam secta sint in punctis F, E, iunctaque sit recta F E, in qua sumptum sit quodlibet punctum G, vel intra, vel extra quadrilaterum à quo ad terminos alterius ęquidistantium veluti ad A, D, ductæ sint G A, G D, ac in triangulo A G D, sit quædam H I ipsis A D, B C æquidistans, & E F secans in L. Dico, si iungantur B H, C I, triangula A B H, D C I inter se æqualia esse.



NAm totum quadrilaterum A B E F, æquale est integro quadrilatero D C E F (vtrunque enim diuiditur per diagonales A E, D E, in duo triangula alterum alteri æquale, eò quod sint super æqualibus basibus, ac inter easdem parallelas) eadem ratione quadrilaterum A H L F æquale est quadrilatero D I L F, & quadrilaterum B E L H æquale quadrilatero C E L I, ergo, & reliquum triangulum A B H reliquo triangulo D C I est æquale. Quod erat demonstrandum.

His itaque præostensis, ad inuestigationem MAXIMARVM, MINIMARVMQVE portionum per idem datum punctum ex qualibet coni-sectione abscissarum accedamus, præmisso tamen, super figuras tertij Schematismi, sequenti Theoremate, vniuersalem, simulque facilem methodum exhibente, qua æquales portiones de eadem coni-sectione abscindi possunt.

THEO-

THEOR. XXIII. PROP. XXXX.

Si in Parabola, ex binis ipsius diametris duo æqualia segmenta sint abscissa: in Hyperbola verò, Ellipsi, vel circulo duæ semi-diametri proportionaliter intra sectionem sectę fuerint, & ex terminis æqualium diametrorum in Parabola, vel ex punctis diuisionum, in reliquis sectionibus, ordinatim applicentur lineæ ad suas diametros, & producantur, donec ad vtranque partem sectioni occurrant: coni-sectionum portiones; at in Ellipsi, vel circulo, minores portiones ijsdem applicatis, tanquam basibus insistentes, inter se æquales erunt. Schematismus 3.

ESto ABC Parabole, in prima, secunda, & tertia figura, vel Hyperbole in quarta, quinta, & sexta, aut Ellipsis in septima, octaua, & nona, aut circulus, in reliquis, quarum sectionum binæ diametri in Parabola sint DB, DE, à quibus dempta sint æqualia segmenta BF, EG, & in reliquis binæ semi-diametri DB, DE (quæ primò in Ellipsi, vel circulo omnino constituant angulum BDE) ita intra sectiones sectæ sint in F, G, vt DB ad BF, sit vt DE ad EG, & per puncta F, G, in singulis figuris sint ad diametros DB, DE ordinatim ductæ AFC, HGI, quæ ad vtranque partem sectioni occurrent [a] in punctis A, C; H, I, & bifariam in F, G secabuntur, cum DB, DG, sint ipsarum diametri. Dico portiones ABC, HEI super ijsdem applicatis, tanquam basibus insistentes, inter se æquales esse. a 19. primi conic.

Nam, ductis ex B, E rectis BN, EN sectionem contingentibus in B, E; ipsæ occurrent [b] simul in N inter diametros DB, DE, & applicatis HI, AC æquidistabunt. Iungantur præterea EB, GF. b 58. primi huius.

Iam in Parabolis, cum sint EG, BF inter se æquales, & parallelę, iunctæ quoq; EB, GF inter se æquidistabunt, & cum ex illarum terminis E, B, ductæ sint rectę EN, BN angulum ENB inter eas constituentes, atq; ex reliquis terminis G, F, sint GI, FA, ipsis EN, BN æquidistantes; ipsæ GI, FA inter easdem EG, BF simul conuenient, vt in M, & iuncta NM ijsdem EG, BF æquidistabit, siue erit altera Parabolæ [c] diameter. Cum ergo sit EG parallela ad [d] NM, & EN ad GM, erit EN æqualis GM; eademque ratione BN æqualis FM, quare vt EN ad NB, ita GM ad MF. c 38. h. d 46. primi conic.

In reliquis verò figuris, cum rectæ DB, DE angulum EDB efficientes, proportionaliter sectæ, aut productæ sint in G, F, sintque ex earum homologis terminis E, B ductæ EN, BN angulum inter ipsas constituentes ENB, & ex reliquis diuisionum punctis G, F sint GI, FA ijsdem EN, BN parallelę, hæ intra datum angulum EDB simul conuenient, vt in M; & recta iungens puncta D, M, per occursum M omnino transibit, siue [e] erit alia sectionis diameter. Cumque ob parallelas GM, EN sit GM ad EN, vt MD ad DN, & ob parallelas MF, NB sit MF ad NB, vt ea- e 38. h. f 47. primi conic.

vt eadem M D ad D N, erit G M ad E N, vt M F ad N B, & permutando G M ad M F, vt E N ad N B.

Cum ergo, in figuris prima, secunda, quarta, quinta, septima, octaua, decima, ac decimaprima sit G M ad M F, vt E N ad N B, erit quoq; quadratum G M ad M F, vt quadratum E N ad N B, vel vt [a] rectangulum H M I ad rectangulum C M A, & permutando quadratum G M ad rectangulum H M I, vt quadratum F M ad rectangulum C M A, & couertendo in prima, quarta, septima, & decima figura (in quibus applicatæ H I, C A secant se mutuò intra sectionem in puncto M) rectangulum H M I ad quadratum G M, vt rectangulum C M A ad quadratum F M, & componendo rectangulum H M I cum quadrato G M, siue vnicum quadratum H G, (nam est A C bifariam secta in G, & non bifariam in M) ad quadratum G M, vt rectangulum C M A cum quadrato F M, siue vt vnicum quadratum C F (cum A C quoque secta sit bifariam in F, & non bifariam in M) ad quadratum F M. In figuris verò secunda, quinta, octaua, & vndecima, in quibus applicatæ H I, C A se mutuò secant extra sectionem in puncto M, cum sit G M quadratum ad rectangulum H M I, vt quadratum F M ad rectangulum C M A, erit per conuersionem rationis quadratum M G ad quadratum G H (est enim rectangulum H M I cum quadrato G H æquale quadrato G M, cum sit H I bifariam secta in G, & ei adiecta sit I M) vt quadratum M F ad quadratum F C, ob eandem rationem, (nam C A quoq; bifariam secta est in C, eiq; addita est in directum A M) & conuertendo quadratum H G ad G M quadratum, erit vt quadratum C F ad F M. Itaq; in singulis prædictis figuris, demptis tertia, sexta, nona, & duodecima, cum demonstratum sit quadratum H G ad G M esse vt quadratum C F ad F M, erit quoque linea H G ad G M, vt linea C F ad F M. In figuris deniq; tertia, sexta, nona, & duodecima, in quibus applicatæ H I, C A conueniunt simul cum ipsa sectione in puncto M, patet quoque esse H G ad G M, vt C F ad F M, cum ipsæ H I, C A, vel H M, C M bifariam secentur in G, F ab earum diametris E G, B F. Est igitur in qualibet datarum figurarum huius schematismi, H G ad G M, vt C F ad F M, quare iuncta H C æquidistabit iunctæ G F; sed est I G æqualis H G, & A F æqualis C F, ergo etiam I G ad G M erit vt A F ad F M, ideoque iuncta A I æquidistabit eidem G F, sed E B quoque ipsi G F æquidistat (vt iam supra ostendimus in Parabolis, & cum in reliquis sectionibus sit D E ad E G, vt D B ad B F ex hypotesi) ergo quatuor iunctæ rectæ lineæ E B, A I, G F, H C sunt inter se parallelæ; sed N M, quàm superiùs ostendimus esse sectionis diametrum, transit per N occursum contingentium E N, B N, ergo recta E B puncta contactuum iungens, ab eadem diametro N M D bifariam secabitur, [b] vt in O, ac ideò omnes aliæ in sectione applicatæ ipsi E B æquidistantes, nempe A I, G F, H C, ab eadem D N M bifariam secabuntur, vt H C in P.

Denique iungantur rectæ H E, C B, & fiet quadrilaterum H E B C, cuius opposita latera H C, E B sunt parallela, & bifariam secta à recta P O, in qua sumptum est punctum M, & ab ipso ad terminos alterius æquidistantium nempe ad H, C ductæ sunt rectæ M H, M C, ac in triangulo H M C est G F ipsi H C parallela, quare iunctæ E G, B F auferent triangula E G H, B F C inter se [c] æqualia; quapropter basis H G ad basim C F erit reciprocè, vt altitudo

[a] 17. tertij conic.

[b] 30. secundi conic.

[c] 39. h.

titudo trianguli CBF ad altitudinem trianguli HEG, sed horum triangulorum altitudines eædem sunt, ac altitudines portionum ABC, HEI, cum puncta B, E sint earundem portionum vertices; quare vt basis HG ad basim CF, vel sumptis duplis, vt HI basis portionis HEI, ad AC basim portionis ABC, ita reciprocè altitudo portionis ABC ad altitudinem portionis HEI, suntque huiusmodi portiones [a] Acuminata regularia, & proportionalia, & eorum bases altitudinibus reciprocantur, quare ipsa Acuminata, seu portiones HEI, ABC inter se sunt [b] æquales. Quod ostendere propositum fuit, quodque de sola Parabola demonstrauit Geometrarum Princeps in 4. Prop. de Conoid. ac Sphæroid. supposita tamen eiusdem Parabolę quadratura.

[a] 36. h.
[b] 37. h.

COROLL. I.

Hinc est, quod applicatæ ex terminis æqualium diametrorum in Parabola, vel ex punctis, in reliquis sectionibus, proportionaliter diuidentibus semi-diametros ad angulum constitutas, omninò se mutuò secant; & quod rectæ lineę, tùm harum applicatarum puncta media, tùm extrema iungentes, rectæ semi-diametrorum terminos iungenti æquidistant. Demonstratum est enim HI, AC secare se mutuò in M, & iunctas HC, GF, AI ipsi EB esse parallelas.

COROLL. II.

Patet quoq; in quarta, quinta, septima, & octaua figura, portiones eiusdem Ellipsis, vel circuli, quarum bases transeant per puncta earum semi-diametros proportionaliter secantia, etiam si ipsæ semi-diametri sint in directum positæ, hoc est applicatæ inter se æquidistent, esse quoque inter se æquales. Vtra enim talium portionum æqualis demonstratur, (vt in superiori propositione) ei portioni, cuius basis sit applicata per punctum proportionaliter secans aliam semi-diametrum, quæ cum prædictis angulum constituat.

COROLL. III.

Ex ijsdem constat, quod si quotcunque applicatæ in eadem Ellipsi, vel circulo integras diametros proportionaliter secent, abscissæ portiones vicissim æquales erunt, hoc est minor minori, & maior maiori.

Si enim in prædictis figuris sint duæ diametri BR, EL, ita sectæ in F, G; vt RF ad FB sit vt LG ad GE, erit componendo, & sumptis antecedentium subduplis DB ad BF, vt DE ad EG; applicatis ergo AFC, HGI erunt portiones ABC, HEI inter se æquales, & reliqua portio ARC reliquæ portioni HRI æqualis erit.

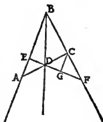
PRO-

PROBL. VI. PROP. XXXXI.

Per datum punctum in angulo rectilineo, rectam applicare, quæ de angulo abscindat triangulum MINIMVM.

Esto angulus rectilineus A B C, in quo datum sit punctum D. Oportet ex D rectam applicare, quæ ab angulo auferat triangulum *MINIMVM*.

a ex 66. 1. huius. Iungatur diameter B D, ad quàm applicetur per D recta A D C, quæ in dato puncto D [a] bifariam secetur. Dico hanc ipsam quæsitum soluere, hoc est triangulum A B C esse *MINIMVM*.



Ducatur quælibet alia E D F, & ab extremo applicatæ A C, quod cadit supra E F, siue ex puncto C agatur C G ipsi E A æquidistans. Et cum sit A D æqualis D C, ob constructionem, erit quoque E D æqualis D G, & angulus A D E æquatur angulo C D G, ergo triangulum A D E, triangulo C D G æquale erit, ac ideò A D E minus triangulo C D F; si ergo addatur commune trapetium B E D C, erit triangulum A B C minus triangulo E B F, & hoc semper: quare triangulum A B C est *MINIMVM*. Quod reperiendum erat.

PROBL. VII. PROP. XXXXII.

Per datum punctum intra coni-sectionem, vel circulum rectam applicare, quæ de ipsa auferat portionem MINIMAM.

Esto A B C data Parabole, vt in prima figura, vel Hyperbole, vt in secunda, aut Ellipsis, vel circulus, vt in tertia, quarum centrum H, & punctum intra datum sit D. Oportet per D rectam applicare, quæ de sectione abscindat portionem *MINIMAM*.

Ducatur H B D sectionis diameter transiens per datum punctum D, per quod ei ordinatim applicetur recta A D C. Dico portionem A B C esse *MINIMAM* quæsitam.

Nam applicata per D in sectione qualibet alia E D F, cum ipsa E F alteram applicatam A C in sectione bifariam secet in D, ipsæ se mutuò bifariam non secabunt, per 6. secundi conicorum, quæ licet de sola Ellipsi, vel circulo agat, verificatur quoque de quacunque data coni-sectione. Secetur ergo E F bifariam in G, per quod ducatur eius diameter G I H sectioni occurrens in I, per quod agatur sectionem contingens I L, quæ ipsi E G F æ-

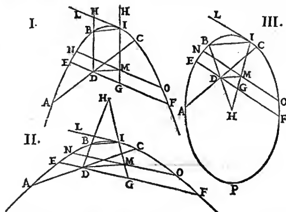
b 5. secundi conic. quidistabit, [b] quare si iungatur I B, cum ipsa tota cadat [c] intra sectionem, &

c 10. primi conic. alteram parallelarum L I secet in I, producta ad partes B, conueniet cum reliqua producta F D E ad partes E, ac ideò D M, quæ ex D ducitur ipsi B I æquidistans cadet supra D F, secabitque diametrum I G, vt in M, cui

per M

per M applicetur recta N M O, quæ applicatæ E G F æquidistabit.

Iam, in prima figura, cum sit B D parallela ad I M, & B I ad D M, erit diametri segmentum B D æquale diametri segmento I M; suntque ex D, M applicatæ diametris rectæ A D C, N M O, vnde portiones A B C, N I O æquales [a] erunt. [a] 40. h.



In reliquis verò, cum in triangulo D H M sit B I parallela ad D M, erit H B ad B D, vt H I ad I M, suntque ex D, M applicatæ diametris rectæ A D C, N M O, quare portiones A B C, N I O æquales [b] erunt. Cum ergo in singulis figuris portio A B C demonstrata sit æqualis portioni N I O, & sit portio N I O minor portione E I F, pars toto, ergo portio A B C erit quoque minor portione E I F, & sic quacunque alia portione, ab applicata per D abscissa, minor demonstrabitur. Vnde portio A B C est *MINIMA* quæsita. Quod faciendum erat. [b] ibidem.

COROLL.

Hinc est, quod dum per datum punctum D intra Ellipsim, ducitur applicata A D C *MINIMAM* portionem abscindes, habetur simul *MAXIMA* portio, quæ est reliqua A P C, vt per se satis constat.

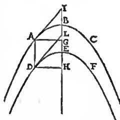
THEO-

THEOR. XXIV. PROP. XXXXIII.

In congruentibus Parabolis per diuersos vertices simul adscriptis, intercepta communium diametrorum segmenta inter se sunt æqualia, & huiusmodi Parabolæ dicantur æquidistantes. Contingentes verò vtranq; sectionem ad terminos eiusdem diametri inter se æquidistant.

Sint duæ congruentes Parabolæ ABC, DEF per diuersos vertices B, E simul adscriptæ circa communem diametrum BEH, & inter ipsas ducta sit quæcunque alia AD ipsi BE parallela, (quæ vtrique Parabolæ conueniet [a] in A, D eritque earum communis [b] diameter) atque ex terminis A, D, agantur AI, DL Parabolas contingentes in A, D, & communi diametro BE occurrentes [c] in I, L. Dico diametrorum intercepta segmenta BE, AD æqualia esse, & contingentes AI, DL inter se æquidistare.

[a] 26. primi conic.
[b] 46. ibid.
[c] 24. ibid.



Nam primum patet ex primo Coroll. 42. primi huius: cumq; omnes interceptæ BE, AD, &c. sint æquales vocentur, huiusmodi Parabolæ inter se æquidistantes. Secundum verò, ita ostenditur.

Applicentur ex A, D ad diametrum BH rectæ AG, DH; erit AH parallelogrammum, ex quo GH æqualis erit AD, siue ipsi BE, quare dempta, vel addita, vti opus fuerit, communi GE, proueniet BG æqualis HE, & dupla [d] IG duplæ LH æqualis erit, & est GA æqualis HD, & angulus IGA angulo LHD æqualis, ergo angulus quoque GIA angulo HLD æqualis erit. Quare contingentes AI, DL inter se æquidistant. Quod, &c.

[d] 35. ibid.

THEOR. XXV. PROP. XXXXIV.

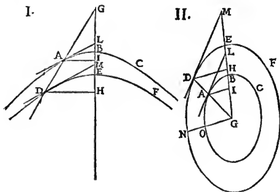
In Hyperbolis, aut Ellipsibus similibus, & concentricis, per diuersos vertices simul adscriptis, intercepta communium diametrorum segmenta ad proprias semi-diametros vnam eandemque habent rationem, & quæ sectiones contingunt ad terminos eiusdem diametri inter se æquidistant.

Sint duæ Hyperbolæ similes in prima figura, vel duæ similes Ellipses in secunda, quarum commune centrum sit G, & communis semi-diameter GBE, sitque ducta quæcumque alia GAD, (quæ tamen in Ellipsi cadat inter coniugatas semi-diametros GE, GN) eritque GAD, [e] item communis sectionum semi-diameter, ducãturque AL, DM ad terminos A, D se-

[e] 47. ibid.

ctiones contingentes, quæ productæ, communi diametro G B E [a] occurrent in L, M. Dico primùm G A ad A D esse vt G B ad B E, & contingentes A L, D L inter se æquidistare. [a] 24. 25. primi conic.

Applicentur ex A, D ad diametrum communem G B M rectę A I, D H. Erit iam in sectione D E F, rectangulum G H M ad quadratum H D, [b] vt transuersum ad rectum, vel, ob sectionum similitudinem, vt transuersum sectionis A B C ad eius rectum, vel vt rectangulum G I L ad quadratum I A, & quadratum D H ad H G, est vt quadratum A I ad I G, ergo ex æquo rectangulum G H M ad quadratum G H, erit vt rectangulum G I L ad quadratum I G, & conuertendo quadratum G H ad rectangulum G H M, vt quadratum I G ad rectangulum G I L, & per conuersionem rationis in prima figura, & componendo in secunda, quadratum G H ad rectangulum [b] 37. ibid.



H G M, vt quadratum I G ad rectangulum I G L, & permutando quadratum H G ad G I, vel quadratum D G ad G A, erit vt rectangulum H G M ad rectangulum I G L, vel permutatis æqualibus, [c] vt quadratum E G ad quadratum G B, seu linea D G ad G A, vt linea E G ad G B, & diuidendo, & conuertendo G A ad A D, vt G B ad B E. Quod primò erat, &c. [c] ibidem.

Præterea, cum superiùs demonstratum sit esse rectangulum G H M ad quadratum H D, vt rectangulum G I L ad quadratum I A, erit permutando rectangulum G H M ad G I L, vt quadratum H D ad I A; sed proportio quadrati H D ad I A componitur ex duabus rationibus H D ad I A, vel ex duabus rationibus H G ad G I, & proportio rectanguli G H M ad G I L componitur ex duabus rationibus, nempe ex G H ad G I, & ex H M ad I L; ergo proportio G H ad G I, hoc est H D ad I A, æqualis est proportioni H M ad I L, & permutando D H ad H M, erit vt A I ad I L, &

H anguli

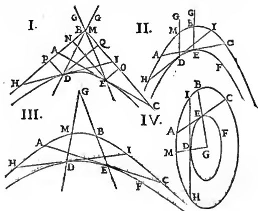
anguli ad H, I sunt æquales, ergo triangula D H M, A I L sunt æquiangula, hoc est angulus D M H æqualis erit angulo A L I, ac ideo D M, A L inter se æquidistant. Quod vltimò demonstrandum erat.

SCHOLIVM.

PRoportionalitas, quàm primo loco superioris theorematis inter semidiametros concentricorum quadrantum N G E, O G B similium Ellipsium inuenimus, eadem penitùs reperietur in alijs deinceps quadrantibus, & ad verticem, vt per se satis patet.

THEOR. XXVI. PROP. XLV.

In Hyperbola intra angulum asymptotalem; vel in Parabolis parallelis, siue in Hyperbolis, aut Ellipsibus similibus, & concentricis circa eandem diametrum per diuersos vertices simul adscriptis, portiones omnes anguli, vel exterioris sectionis, quarum bases interiorem sectionem contingant, inter se sunt æquales.



SIt intra angulum asymptotalem A B C descripta Hyperbole D E F, vt in prima figura, vel duæ æquidistantes Parabolæ A B C, D E F, vt in secunda; vel similes concentricæ Hyperbolæ, vt in tertia, aut Ellipses, vt in quarta, quarum commune centrum sit G, ac omnes per diuersos vertices B, E sint simul adscriptæ circa eandem diametrum G B E, & ad verticem E interiorem sectionem contingat recta A E C, & ad quodcunque aliud punctum

ctum D contingat eandem recta HDI. Dico ipsas contingentes exteriori sectioni ad vtranque partem occurrere, ac de ea æquales portiones abscindere.

Nam ductis diametris GBE, GMD; cum in prima figura rectæ AEC, HDI Hyperbolen contingant in E, D, ipsæ productæ cum vtraque asymptoto conuenient in A, C, & in H, I, atque [a] bifariam secabuntur in E, D, à quibus si ducantur asymptotis æquidistantes EN, EO, & DP, DQ, erit rectangulum NEO æquale [b] rectangulo PDQ. siue parallelogrammum NO æquale sibi æquiangulo parallelogrammo PQ, & duplum duplo æquale erit, hoc est triangulum ABC, triangulo HBI (cum AC, HI sint bifariam sectæ in E, D.) *a 3 dio* *b 12. ibid.*

In reliquis verò figuris cum AEC contingat in E interiorem sectionem DEF, ipsa æquidistabit [c] contingenti ex B exteriorem, ac ideo erit vna applicatarum ad diametrum GBE in exteriori sectione ABC, & bifariam secabitur in E. Eadem ratione contingens HDI erit vna applicatarum ad diametrum GMD in exteriori, & bifariam secabitur in D, eritque in secunda figura segmentum diametri BE æquale segmento MD, & in tertia habebit [d] GB ad BE eandem rationem, ac GM ad MD, in quarta denique GE ad EB eandem, ac GD ad DM: quare portiones ABC, HMI exterioris sectionis ABC, quarum bases contingunt interiorem DEF inter se sunt [e] æquales. Quod demonstrandum erat. *c 43.44.h.* *d ibidem.* *e 40. h.*

COROLL.

Hinc est, quod contingentes ad puncta interioris concentricæ sectionis, exteriori semper ad vtranque partem occurrunt, & à tactibus bifariam secantur.

THEOR. XXVII. PROP. XLVI.

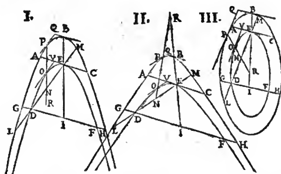
Si in Parabolis parallelis, vel in Hyperbolis, aut circulis, siue in Ellipsibus similibus, & concentricis ad punctum quodlibet interioris sectionis, quædam recta linea contingat, cui ducta sit quęcunq; alia æquidistans, vtranque sectionem secans, erit rectangulum sub segmentis huiusmodi applicatę inter vtranque sectionem interceptis, æquale quadrato semi-tangentis.

Sint duę Parabolę ęquidistãtes, vt in prima figura, vel similes, & concẽtricę Hyperbolę, vt in secũda, aut Ellipses, vel circuli, vt in tertia, ABC, DEF, quarũ centrum, respectiuè sit R, & ad quodcunq; punctum E interioris sit contingens recta AEC, (quæ ad vtranque partem exteriori [f] occurret in A, C, & à tactu E bifariam secabitur) eique sit æquidistanter ducta quælibet alia GDH, (quæ item ad vtranque partem exterioris occurret in *f Coroll. 45. h.*

G, H cum sit vna applicatarum, &c.) interiorem secans in D, F. Dico rectangulum sub segmentis GD, DH æquari quadrato semi-tangentis AE.

Nam iuncta DE, & bifariam secta in N, ducatur eius diameter NOP, quæ erit vtriusque sectionis diameter (cum ipsę ponantur parallelę, vel concentricæ) eas secans in O, P. Patet, si ex O, P concipiantur contingentes sectiones OV, PQ has inter se [a] æquidistare, sed OV ipsi DE ęquidistat, cum hæc sit vna applicatarum in sectione DEF ad diametrum RNO, quare, & PQ ipsi DE æquidistabit, hoc est DE erit vna applicatarum in sectione ABC ad diametrum RNP; ex quo NE producta ad vtranque partem exteriori sectioni ABC occurret, vt in L, M, & à diametro PN bifariam secabitur in N, sed DE quoque bifariam secta fuit in N, quare interceptæ LD, EM inter se sunt æquales, hoc est rectangulum LDM æquale est rectangulo LEM.

[a] 43. 44. huius.



Iam cum sit applicata AC bifariam secta in E, ducta eius diametro BE, hæc quoque bifariam secabit aliam applicatam GH, vt in I, eritque etiam diameter sectionis parallelæ, vel concentricæ DEF; & cum AC contingat sectionem DEF in E, sitque DF ei æquidistans, hæc item bifariam secabitur à diametro EI, vt in I. Cum sit ergo GI æqualis IH, & ablata DI æqualis ablatæ IF, erit reliqua GD reliquæ FH æqualis, siue rectangulum GDH æquale rectangulo GFH.

Tandem ex B ducatur contingens BQ alteri contingenti PQ conueniens in Q. Erit ergo rectangulum GDH ad LDM, [b] vt quadratum BQ ad PQ; eademque ratione rectangulum AEC ad LEM, vt quadratum BQ ad PQ: quapropter rectangulum GDH ad LDM, erit vt AEC ad LEM, & permutando GDH ad AEC, vel ad quadratum AC, (cum AE, EC sint æquales) vt rectangulum LDM ad LEM, sed LDM ipsi LEM æquale ostensum fuit, quare, & rectangulum GDH, vel GFH æquale erit quadrato semi-tangentis AE. Quod erat demonstrandum: quodque

[b] 17. tertij conic.

quodque in parallelis Parabolis, ac similibus concentricis Hyperbolis in 42. & 47. primi huius, sed alijs aggressionibus ostensum fuit.

COROLL. I.

Hinc est, quod in parallelis Parabolis, vel concentricis, ac similibus Hyperbolis, aut Ellipsibus, applicata in interiori sectione hinc inde producta exteriori necessariò occurrit, totaque ab illius diametro bifariam secatur, & quod huius applicatæ intercepta segmenta inter se sunt æqualia.

Demonstratum est enim applicatas DE, DF in interiori sectioni DEF exteriori ABC occurrere in L, M, & in G, H, & diametros ON, FI, quæ bifariam secant DE, DF in N, I, bifariam quoque diuidere totas LM, GH, atque interceptas portiones LD, EM inter se æquales esse, itemque GD, FH æquales.

COROLL. II.

Constare etiam ex vltima parte huius Theorematis, quod, si in quacunq; coni-sectione, vel circulo duæ rectæ lineæ applicatæ fuerint inter se æquidistantes, ad vtranque partem sectioni occurrentes, quæ à tertia quadam applicata vtcunque secentur, rectangula sub segmentis æquidistantium eandem inter se habere rationem, quam rectangula sub segmentis tertiæ secantis homologè sumpta.

Ibi enim ostensum fuit tùm in Parabola, tùm in Hyperbola, aut Ellipsi, vel circulo ABC, in quibus duę æquidistanter applicatæ AC, GH secantur à tertia applicata LM in punctis E, D, rectangulum GDH ad AEC, esse vt rectangulum LDM ad LEM.

THEOR. XXVIII. PROP. XLVII.

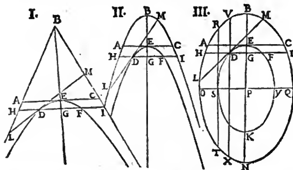
In Hyperbola intra angulum asymptotalem descripta, vel in æquidistantibus Parabolis, aut similibus concentricis Hyperbolis, aut Ellipsibus, rectarum in exteriori applicatarum, ac interiorem sectionem contingentium, MINIMA est ea, quæ ad verticem maioris axis ducitur. At in Ellipsibus, MAXIMA est quæ ad verticem minoris axis.

Esto, in prima figura, in angulo asymptotali ABC descripta Hyperbole DEF, cuius axis BEG, vel in secunda, sint duæ Parabolæ æquidistantes, vel duæ similes concentricæ Hyperbolæ ABC, DEF circa axim BE; aut in tertia, duæ similes concentricæ Ellipses ABC, DEF, sitque exterioris sectionis axis maior BPN, minor OPQ, & in interiori sit maior

EPK,

EPK, minor SPY, & in quauis figura ad E verticem maioris axis interiorem sectionem contingat recta AEC, quæ ad vtranque partem exterioris
a Coroll. 45. huius. pertinget, a ac bifariam secabitur in E. Dico ipsam AEC esse *MINIMAM* exteriori sectioni applicatarum, atque interiorem contingentium. Et in Ellipsibus contingentem RST ad verticem minoris axis esse *MAXIMAM*.

Sit quæcunque alia contingens LDM ad punctum D, quæ item exte-
b ibidem. riori sectioui occurret in L, M, b & bifariam secabitur in D, & per D agatur HDI ipsi AEC æquidistans, exteriori occurrens in H, I. Et cum in sectione ABC per punctum D intra ipsam sumptum, sint duæ HDI, LDM, quarum prima maiori axi BG est perpendicularis, altera verò inclinata, erit rectangulum HDI minus rectangulo LDM, (cum ipsum HDI sit
c 33. 34. h. d 46. h. *MINIMVM* c) sed HDI æquatur d quadrato AE, ergo quadratum AE



minus erit rectangulo LDM, siue quadrato LD, & quadruplum quadruplo minus, hoc est quadratum AC minus quadrato LM, siue contingens linea AC minor contingente AM, & hoc semper, vbicunque contingat obliqua AM: quare AEC erit *MINIMA* interiorem sectionem contingentium. Quod erat primò, &c.

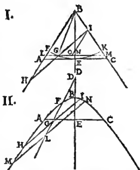
Iam, ducta sit per D, recta VDX æquidistans contingenti RST. Et cum in Ellipsi ABC sit per punctum D recta VDX minori axi OQ perpendicularis, sitq; alia obliqua LDM; erit rectangulum VDX maius rectangulo
e 34. h. f 46. h. LDM (cum VDX sit e *MAXIMVM*) sed VDX æquatur f quadrato RS, quare quadratum RS maius erit rectangulo LDM, siue quadrato LD, & quadruplum quadruplo maius, hoc est quadratum RT maius quadrato LM, hoc est linea RT maior linea RM, & hoc semper de qualibet contingente inter S, & E, quare ipsa RT erit *MAXIMA* interiorem Ellipsim contingentium. Quod erat vltimò demonstrandum.

THEO-

THEOR. XXIX. PROP. XLVIII.

MAXIMA portionum eiusdem anguli rectilinei, vel Hyperbole, & quarum diametri sint æquales, est ea, cuius diameter sit axis dati anguli, vel Hyperbolæ.

ESto primùm, in prima figura, ABC angulus rectilineus, circa axim BD, cui applicata sit perpendiculariter quæcunque AEC, eum secans in E. Dico portionum, siue triangulorum ex dato angulo abscissorum, & quorum diametri sint æquales ipsi BE, *MAXIMVM* esse ABC.



Nam cum BE sit perpendicularis ad AC, facto centro B interuallo BD, ac circulo descripto, eius peripheria continget rectam AC in D, anguli latera secans in F, K; quare diametri æquales abscissorum triangulorum ad peripheriam FEK pertingēt: sumpto igitur in ipsa quocunque puncto G, iungatur BG, & ducatur per G recta LGM ipsi AC æquidistans, axim secans in N, & erit LN æqualis NM, vnde LG minor GM, seceturergo GO ipsi LG ęqualis, & agatur OI parallela ad BA, iungaturque IG, & producatur, quæ cum OI secet in I, alteram quoque parallelam BA secabit in H, eritque IG æqualis GH, sed anguli ad verticem IGO, HGL sunt æquales, ergo, & triangulum IGO triangulo HGL æquale erit, & communi addito trapetio BLGI, erit quadrilaterum BLOI æquale triangulo HBI, sed triangulum ABC maius est quadrilatero BLOI, totum sua parte, quare triangulum ABC erit quoque maius triangulo HBI, cuius diameter BG æqualis est axi BE trianguli ABC, & hoc semper de quolibet alio triangulo circa diametrum ipsi BE ęqualem; quare triangulum ABC est *MAXIMVM*. Quod erat primò, &c.

Sit præterea, in secunda figura, Hyperbole ABC, cuius centrum D, axis DBE, ex quo dempta sit BE, eique per E applicata AEC, & sit quælibet alia diameter DFG, ex qua sumatur FG ipsi BE æqualis, applicetur que HGI. Dico portionem ABC portione HFI maiorem esse.

Nam cum sit semi-axis DB semi-diametrorum a *MINIMA*, hæc erit maior DF, estque BE æqualis FG, quare DB ad BE minorem habebit rationem quàm DF ad FG: fiat ergo DF ad FL, vt DB ad BE, & habebit DF ad FL minorem rationem quàm DF ad FG, ideoque FL maior erit FG, si ergo per L applicetur MLN, quæ ipsi HGI æquidistet, erit a 24. h.

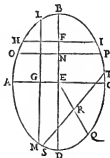
portio

a 40. h. portio M F N maior portione H F I (totum sua parte) sed portio M F N æqualis [a] est portioni A B C (cum sit DF ad F L, vt D B ad B E) quare portio A B C erit maior H F I, & hoc semper de qualibet alia portione, cuius diameter æqualis sit axi B E: ergo portio A B C est *MAXIMA* portionum æqualium diametrorum. Quod erat vltimò demonstrandum.

THEOR. XXX. PROP. XLIX.

MAXIMA portionum semi-Ellipsi minorum, & æqualium diametrorum est ea, cuius diameter sit minoris semi-axis segmentum. MINIMA verò, cuius diameter sit segmentum maioris semi-axis.

ESto A B C D Ellipsis, cuius axis maior sit B D, minor A C, centrum E, sitque ex minori semi-axe A E demptum segmentum A G, & ex maiori B E ipsi A G sit æquale B F perque puncta G, F applicatæ sint axibus rectæ L G M, H F I. Dico portionem L A M esse *MAXIMAM*, & H B I *MINIMAM* aliarum portionum eiusdem Ellipsis circa diametros ipsis A G, B F æquales.



Quod L A M sit maior H B I patet sic. Nam cum sit E A minor E B, A G verò æqualis B F, habebit E A ad A G minorem rationem quàm E B ad B F: fiat ergo E B ad B N, vt E A ad A G, & habebit E B ad B N minorem rationem quàm E B ad B F, siue B N erit maior B F; quare applicata O N P cadet infra H I: & cum sit vt E A ad A G, ita E B

b ibidem. ad B N, erit portio L A M [b] æqualis portioni O B P, sed hæc maior est portione H B I, totum parte, ergo L A M maior est H B I.

Præterea, ducta inter semi-axes quacunque semi-diametro E Q, ex ipsa, quę maior est E A (eo quod hæc sit semi-dia-

c 86. primi huius. metrorum *MINIMA* [c]) & eò maior ipsa A G, dematur Q R æqualis ipsi A G, vel B F, applicetúrque S R T. Iam cum sit E A minor E Q, & A G æqualis Q R, habebit E A ad A G minorem rationem, quàm E Q ad Q R, ac ideò vti superiùs ostendimus, portio L A M erit maior portione S Q T. Eadem ratione, cum sit E Q minor

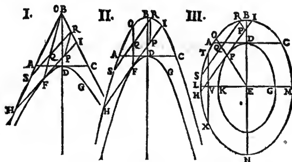
d ibidem. E B, (eò quod hæc sit [d] semi-diametrorum *MAXIMA*) & Q R æqualis B F, habebit E Q ad Q R minorem rationem quàm E B ad B F, quapropter portio S Q T maior erit portione H B I, & hoc semper de qualibet portione, cuius diameter sit inter semi-axes; quare portio L A M erit *MAXIMA*, & H B I *MINIMA* portionum æqualium diametrorum, Quod erat demonstrandum.

THEO-

THEOR. XXXI. PROP. L.

MAXIMA portionum eiusdem anguli rectilinei, vel cuiuscunq; coni-sectionis, quarum bases sint æquales, est ea, cuius diameter sit segmentum axis, vel maioris semi-axis (respectiuè ad Ellipsim) datæ sectionis. MINIMA verò in Ellipsi est, cuius diameter sit segmentum minoris semi-axis.

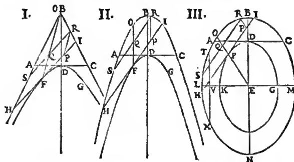
ESto A B C angulus rectilineus, vt in prima figura; vel Parabole, aut Hyperbole, vt in secunda; vel Ellipsis, vt in tertia, quarum axes sint B D, & in Ellipsi axis maior sit B D N, minor L K M, centrum E, atque maiori axi in quauis figura applicata sit quęcunque A D C. Dico primùm portionem A B C, quæ tamen in tertia figura sit minor semi-Ellipsi L B M, esse *MAXIMAM* omnium portionum eiusdem anguli, vel coni-sectionis, quarum bases æquales sint basi A C.



Nam, in prima figura, describatur per D in angulo asymptotali A B C Hyperbole F D G, in secunda verò, si A B C fuerit Parabole, describatur per D congruens Parabole F D G, vel si fuerit Hyperbole, describatur item per D, vti etiam in tertia, eiusdem nominis sectio F D G similis, & concentrica ipsi A B C, & tunc recta A D C continget omnino sectionem F D G in D; sumptoque in interiori sectione F D G quolibet puncto F, per ipsum ducatur sectionem contingens H F I exteriori occurrens in H I, deque ipsa abscindens portionem H O I, cuius diameter sit O F.

Iam, in singulis figuris, basis A C minor est basi H I, cum sit *a MINIMA* contingentium sectionem F D G, quare, & dimidium D C dimidio F I minus erit. Fiat ergo F P æqualis D C, & ex P agatur P R diametro F O æquidistans, cui ex R applicetur R Q S; patet ipsam R Q S ęquari basi A C, *a 47. h.*

hoc est portiones A B C, S O R esse æqualium basium, sed H O I maior est
ᵃ45.h. S O R, totum parte, ergo, & A B C, quæ ipsi H O I ᵃ est æqualis, erit maior eadem S O R, & hoc semper, &c. vnde portio A B C est *MAXIMA* portionum æqualium basium. Quod primò erat, &c.



Prȩterea, cũ in tertia figura, quæ ex K ducitur interiorem Ellipsim F D G
ᵇ47.h. contingens sit ᵇ *MAXIMA* eandem Ellipsim contingentium, ipsa erit omnino maior A C; quare eidem axi applicata, quæ ipsi A C sit æqualis, minorem axim secabit inter L, & K, & sit ea T V X. Si ergo concipiatur per V descripta Ellipsis, datis A B C, F D G similis, & concentrica, recta T V X
ᶜ ibidem. hanc Ellipsim continget, eritque ᶜ *MAXIMA* eandem Ellipsim contingentium, quapropter portiones, quarum bases sint æquales basi T V X, hanc mediam Ellipsim omnino secabunt, ac ideo maiores erunt portione T L X,
ᵈ45.h. cum portiones ab ijsdem contingentibus abscissæ sint ᵈ omnes portioni T L X æquales. Quare portio T L X est *MINIMA* portionum æqualium basium, ex eadem Ellipsi A B C abscissarum. Quod erat vltimò demonstrandum.

C O R O L L.

EX his constat *MINIMAM* portionum semi-Ellipsi maiorum, quarum bases sint ȩquales eam esse, cuius diameter sit segmentum maioris axis, *MAXIMAM* verò, cuius diameter sit segmentum minoris.

Nam in tertia figura, cum portionum A B C, S O R, T L X, &c. semi-Ellipsi minorum, & super æqualibus basibus, ipsa A B C sit *MAXIMA*, & T L X *MINIMA*, ac ipsæ sint portiones eiusdem terminatæ magnitudinis, siue Ellipsis eiusdem A B C N, patet reliquarum portionum semi-Ellipsi maiorum A N C, S N R, X M T, &c. quæ item sunt super æquales bases A C, S R, T X, portionem A N C esse *MAXIMAM*, & X M T *MINIMAM*.

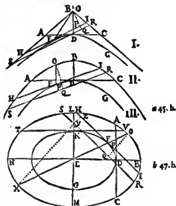
THEO-

THEOR. XXXII. PROP. LI.

MINIMA portionum eiusdem anguli, vel cuiuslibet coni-sectionis, quarum altitudines sint ęquales, est ea, cuius diameter sit segmētum maioris axis: in Ellipsi verò MAXIMA est, cuius diameter sit segmentum minoris axis.

ESto A B C, in prima figura, angulus rectilineus, vel in secunda, Parabole, aut Hyperbole, siue in tertia Ellipsis, quarum axes sint B D, at in Ellipsi axis maior sit B D N, minor L K; centrum E, atque axi B D in quauis figura applicata sit quælibet A D C. Dico portionem A B C, quæ in tertia figura sit, vel maior, vel minor semi-Ellipsi, esse *MINIMAM* omnium portionum eiusdem anguli, vel coni-sectionis, quarum altitudines sint æquales ipsi B D.

Descripta .n. per D, vel Hyperbola in prima figura, cuius asymptoti sint B A, B C; vel in reliquis figuris, descripta eiusdem nominis coni-sectione simili, & concentrica F D G, quę rectam A D C continget in D; sumatur in interiori sectione quodlibet aliud punctū F, ad quod sit contingens H F I exteriori occurrens in H, I, atque portionē abscindens H O I, cuius diameter sit O F, altitudo verò sit O P.



Itaque cum portio H O I ęqualis[a] sit portioni A B C eiusdem sectionis, erit reciprocè basis H I ad basim A C, vt altitudo B D ad altitudinem O P, sed est H I maior A C, cum A C sit omnium[b] contingentium *MINIMA*, ergo, & B D erit maior O P: producatur ergo O P, & sumatur O Q ipsi B D æqualis, applicetúrque S Q R contingenti H I æquidistans: eruntque portiones S O R, A B C æqualium altitudinum, sed est portio H O I minor S O R, pars suo toto, ergo, & portio A B C, quæ ipsi H O I est æqualis, minor erit portione S O R, & hoc semper, &c. Vnde portio A B C est *MINIMA* portionum eiusdem anguli, vel coni-sectionis, & æqualium altitudinum. Quod primò erat, &c.

[a] 45. h.

[b] 47. h.

Ampliùs in tertia figura esto recta V K T minori axi L M ordinatim applicata. Dico portionem V M T (quæ sit vel maior, vel minor semi-Ellipsi) cuius diameter, vel altitudo est M K, esse *MAXIMAM* portionum omnium, quarum altitudines ipsi M K sint æquales.

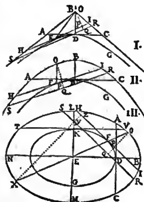
Descripta enim per K Ellipsi K D G simili, & concentrica datæ A B C N, quæ rectam V K T continget in K, sumptoque in eius peripheria quocunque puncto F, ducatur contingens H F I exteriori sectioni occurrens in H, I, deque ipsa abscindens portionem I X H, cuius diameter sit F X, altitudo verò sit X Z.

a 45. h. Iam cum portio V M T æqualis sit a portioni I X H, erit basis V T ad basim I H reciprocè vt altitudo X Z ad altitudinem M K, sed est V T maior I H,
b 47. h. cum ipsa V T sit contingentium b *MAXIMA*, ergo, & X Z erit maior M K; facta igitur X Y æquali ipsi M K, applicataque S Y R, erunt portiones V M T, R X S æqualium altitudinum, sed est portio R X S minor portione I X H, pars suo toto, ergo ipsa R X S minor quoque erit portione V M T, & hoc semper, &c. Quare portio V M T est *MAXIMA* portionum eiusdem Ellipsis, & æqualium altitudinum. Quod erat vltimò demonstrandum.

SCHOLIVM.

PRoxima quatuor præcedentia Theoremata, super hoc ipso Diagrammate, facilè simul, tanquam Consectaria demonstrabuntur, si tamen hæ tres conclusiones notatu dignæ præmittantur, à quibus ipsa ortum ducant. Nimirũ.

I. INter diametros æqualium portionum eiusdem anguli, vel Hyperbolæ, aut Ellipsis, *MINIMA* est ea illius portionis, cuius diameter simul sit segmentũ axis dati anguli, vel Hyperbolæ: sed in Ellipsi, quæ sit segmentum minoris axis, & *MAXIMA*, quæ sit segmentum maioris.



Etenim in prima figura angulum exhibente, in portionibus A B C, H O I,
c 45. h. quæ sunt c æquales, (eò quod ipsarum bases contingant eandem similem concẽtricam Hyperbolen interiorem) diameter B D, quæ est axis dati anguli, minor est diametro O F, cum sit B D
d 24. h. semi-transuersorum d *MINIMA*. Et in secunda, Hyperbolen repræsentante, in portionibus item A B C, H O I, quę ob eandem rationem æquales sunt, diameter B D, quæ est segmentum axis Hyperbolæ, minor est diametro O F, cum sit B D ad O F, vt semi-axis pertingens ad B ex centro exterioris Hyperbole, A B C, ad semi-transuersum pertingens ad O ex eodem centro, vt satis constat ex 44. huius, àt semi-axis, minor est semi-transuerso, quare patet, &c. In tertia dènique in portionibus T L V, H O I, A B C inter se pariter æqualibus, diameter L K portionis T L V, quæ est ex minori axe datæ Ellipsis, minor est diametro O F portionis H O I, atque minor diametro B D portionis A B C, & sic de singulis, quoniam E K ad K L est vt E F ad F O, & vt E D ad D B, estque antecedens E K minor
e ibidem. qualibet alia antecedentium, cum ea sit e semi-transuersorum *MINIMA*, & E D maior est ipsarum antecedentiũ, cum sit semi-trãsuersorum *MAXIMA*, quare & K L erit *MINIMA*, & D B *MAXIMA*, &c. idemque dicetur de æqualibus portionibus semi-Ellipsi maioribus. Verùm inter diametros æqualium portionum eiusdem Parabolæ non datur *MAXIMA*, cum omnes æquales sint.

2. Inter

2. INter bases æqualiũ portionum eiusdem anguli, vel coni-sectionis *MINIMA* est ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maioris axis, respectiuè ad Ellipsim: & *MAXIMA* eius, cuius diameter sit segmentum minoris.

In qualibet enim figura, basis A C portionis A B C, circa maiorem axim, *MINIMA* [a] est basium, aliarum æqualium portionum; & in Ellipsi basis V T portionis V L T circa minorem, *MAXIMA* est basium, reliquarum æqualium portionum, vel ipsæ simul sint semi-Ellipsi minores, vel simul maiores, &c. [a] 47. h.

3. INter altitudines æqualium portionum de eodem angulo, vel coni-sectione *MAXIMA* est ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maioris axis respectiuè ad Ellipsim, & *MINIMA* eius, cuius diameter sit segmẽtum minoris.

Id autem in superiori propositione ostensum fuit: nempe B D, quæ est altitudo portionis A B C, circa maiorem axim, maiorem esse O P altitudine æqualis portionis H O I, atque ampliùs, in Ellipsi, altitudinem M K portionis T M V circa minorẽ axim, minorem esse altitudine X Z æqualis portionis HXI, &c.

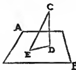
E' prima itaque harum conclusionum, elicitur veritas prop. 48. & 49. h. ex altera verò prop. 50. è tertia denique prop. 51. quæ omnia per se satis patent.

Sed hæc de planis, pro hac vice, dixisse sufficiat. Nonnulla sequuntur quæ iam diù pariter circa solida à coni-sectionibus genita excogitauimus. Noua omnia, ni fallor, omnia saltem geometrica: quæ si apertæ iucunditatis referta comperies amice Lector, reconditæ vtilitatis haud expertia esse aliquando te certiorem factum non dubito.

THEOR. XXXIII. PROP. LII.

Recta linea, quę à puncto extra planũ dato sit ipsi plano perpẽdicularis, MINIMA est rectarũ ab eodem pũcto ad idem planũ ducibiliũ.

SIt extra planum A B, punctum C, à quo ducta sit ipsi plano perpendicularis C D. Dico hanc esse *MINIMAM* ducibilium ex C ad alia puncta plani A B.



Sumatur vbicunque in dato plano aliud punctum E, iunganturque D E, C E. Et cum C D recta sit ad planum A B, erit [b] angulus C D E rectus, ideoque C E D acutus, siue minor C D E: quare C D minor erit C E, & hoc semper. Vnde C D est *MINIMA*, &c. Quod &c. [b] 3. def. vnd. Ele.

THEOR. XXXIV. PROP. LIII.

Si in Cono, vel Cylindro recto planum ductum per vnum laterum trianguli, vel rectanguli per axem eidem triangulo, vel rectangulo rectum fuerit, idem planum in ipso tantùm latere conicam, vel cylindricam superficiem continget, quæ tota cadet ad alteram partem plani contingentis.

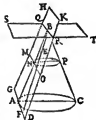
ESto in figura, (quę & Conum, & Cylindrum rectum exhibeat) planum per axẽ A B C, cui rectũ sit aliud planũ G D K H transiens per latus A B, cum

plano

plano basis Coni, vel Cylindri A C efficiens communem sectionem G A D. Dico ipsum planum G D K H, licet in infinitum extendatur, in vnico tantùm latere B A superficiem Conicam, vel Cylindricam contingere, ac propterea hanc totam cadere infra planum contingens.

Quoniam cum axis Coni, vel Cylindri recti sit perpendicularis plano basis, erit planum per axem B A C rectum basi A C, siue planum basis A C rectum plano per axem A B C, cui rectum quoque positum fuit planum per B A, A D ductum, quare G A D communis planorum sectio eidem plano per axem erit perpendicularis, [a] vnde angulus D A C rectus erit, sed est C A diameter circuli A C, quare G A D circuli peripheriam continget, ac tota cadet extra conicam, vel cylindricam superficiem.

a 19. vnd. Elem.



Iam per B axis verticem concipiatur ductum planum S T basi A C æquidistans, quod communem sectionem faciet cum plano G K rectam Q B R ipsi G A D [b] parallelam, abscindetque de plano G K vtrinque in infinitum extenso, partem Q R K H, quæ tota cadet supra planum S T ad oppositas partes conicæ, vel cylindricæ superficiei B A C (cum hæc tota cadat inter æquidistantia plana S T, A C, vt satis constat,) & partem Q R D G, quæ tota erit ad partes eiusdem superficiei. Sumatur ergo in plano Q R D G extra lineam B A, inter æquidistantes Q R, G D quodlibet punctum E, & iuncta B E producatur: patet ipsam cum A D conuenire; (cum recta B E sit in eodem plano in quo sunt B A, & A D, & alteram parallelarum secet in B) conueniat in F, & cum punctum F sit extra solidi superficiem, ipsa quoque B F cadet tota extra [c] eandem, quare punctum E erit extra ipsam superficiem, & sic de quolibet alio puncto plani G R, quod sit extra latus B A, quapropter planum G R superficiem dati solidi contingit per rectam B A, ac ideo ipsa superficies cadit tota ad alteram partem plani G R. Quod erat, &c.

b 16. ibid.

c Coroll. primæ primi Conic.

ALITER.

SI per quodcunque aliud punctum N lateris B A concipiatur duci planum secans Conum, vel Cylindrum, quod sit basi A C parallelum, ipsum in solidi superficie circuli peripheriam [d] describet, & in plano per axem rectam, seu diametrum N P, quæ ipsi A C [e] æquidistabit, in plano verò Q D rectam M N O, quæ item rectæ G A D erit parallela (cum sint communes sectiones æquidistantium planorum cum altero plano) eritque angulus O N P [f] æqualis angulo D A C, siue rectus, (cum superiùs demonstratum sit ipsum D A C rectum esse) hoc est recta M N O peripheriam N P continget in N, & ex vtraque parte cadet extra solidi superficiem, & hoc semper de qualibet alia ducta in plano B D ipsi G D æquidistante: quare totum planum G R, quod per latus B A ductum fuit rectum ad planum A B C per axem ductum, solidi superficiem contingit tantùm per latus B A: vnde ipsa superficies cadit tota ad alteram partem plani G R. Quod, &c.

d 4. primi Conic.

e 16. vnd. Elem.

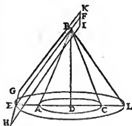
f 10. ibid.

THEO-

THEOR. XXXV. PROP. LIV.

Si Conus rectus plano per axem secetur, per in quo verticem ducta sit quędam linea, quę non in directum sit posita cum aliquo laterum trianguli per axem perque ipsam agatur planum, quod rectum sit ad idem planum, per axem ductum: Huiusmodi planum in ipso tantùm vertice coni superficiem continget, quæ tota cadet ad alteram partem ducti plani.

Sit conus rectus ABC plano per axem BD sectus efficiente triangulum ABC, in cuius plano, & per verticem B sit quælibet linea EBF, non tamen cum aliquo laterum BA, BC sit in directū posita, per quam transeat planum GHIK, quod ad planum per axem ABC sit rectum. Dico tale planum GI in nullo alio puncto, quàm in vertice B conicam superficiem contingere, &c.



Quoniam si recta EBF ęquidistat ipsi AC basi trianguli per axem, anguli interiores EBD, ADB duobus rectis æquales erunt, sed ADB rectus est, cum sit axis BD plano basis AC perpendicularis, quare, & angulus EBD rectus erit, sed planum ABC ponitur rectum ad planum GI, & in eo ad communem horum sectionem EBF ducta est perpendicularis DB, ergo ipsa DB erit [a] recta ad planum GI, estque eadem BD recta ad planum basis AC, quare duo plana GI, AC inter se [b] æquidistant, atque est punctum B in vno plano GI, & circuli peripheria AC in altero AC, ergo recta BA, quæ manente puncto B circa peripheriam CA circumducitur conicam superficiem describens, hoc est ipsa conica superficies tota cadet inter plana ęquidistantia (vbicunque enim ducatur planum per axem, habentur communes æquidistantium planorum sectiones inter se parallelę, inter quas cadit communis sectiò secantis plani cum superficie) ac ideò planum GI in ipso tantùm vertice B, coni superficiem continget.

[a] 4. defin. vndec. Elem.
[b] 14. vnd. Elem.

Si verò recta FBE conueniet cum CA, vt in E; patet; dum triangulum BED circa axim BD conuerti concipitur, rectam BE coni BEL superficiem describere, cuius triangulum per axem est BEL idem cum plano ABC, cui rectum est planum GI ductum per latus BE, quare idem planum GI continget conicam BEL in ipso tantùm [c] latere BE, sed latus BE contingit conicam BC in vnico tantùm vertice B, ergo planum GI conicam ABC in ipso tantùm vertice B contingit, ac propterea ipsa coni superficies cadit tota infra planum GI. Quod erat demonstrandum.

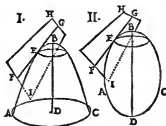
[c] 53. h.

THEOR. XXXIV. PROP. LV.

Si rectum Conoides Parabolicum, vel Hyperbolicum, aut Sphæra, aut Sphæroides rectum plano per axem secetur, & communem sectionem plani secantis cum solidi superficie quædam recta linea in puncto contingat, per quam ductum sit aliud planum, quod rectum sit ei per axem ducto: huiusmodi planum in prædicto tantùm puncto solidi superficiem continget, ipsaque superficies cadet tota ad alteram partem plani contingentis.

ESto rectum Conoides Parabolicum, vel Hyperbolicum, vt in prima figura; vel Sphæra, aut Sphæroides rectum, vt in secunda, plano per axem B D sectum efficiente in solidi superficie sectionem A B C, (quæ erit genitrix [a] dati solidi) & per punctum E in ipsa sumptum, sit ei contingens linea F E G, per quam concipiatur duci planum H I, quod sit rectum plano per axem A B C; dico huiusmodi planum H I in ipso tantùm puncto E conuexam solidi superficiem contingere, atque hanc totam cadere infra planum H I.

[a] ex comment. Cõmand. in lib. Arch. de Conoi. & Sphær.



Cum enim recta F E G sectionem A B C cõtingat, producta conueniet [b] cum axe sectionis B D ad partes verticis B; qua propter si concipiatur planum A B C denuò conuerti circa axim B D, patet sectionem A B C, dati solidi, & cõtingentem F E G, coni superficiem describere, quæ conuexam solidi superficiem per circuli tantùm peripheriam à pũcto E descriptam continget (cum punctum E sit tum in contingente, tum in ipsa sectione, & in reuolutione peripheriam circuli designet, ac reliqua puncta rectæ F G sint extra sectionem A B C.) Et quoniam planum H I per contingentem F G ductum, positum fuit rectum ad planum per axem A B C, quod est idem, ac planum per axem coni à latere F G descripti, ergo planum H I secundùm latus tantùm F G conicam superficiem continget, [c] sed latus F G conuexam solidi superficiem contingit tantùm in puncto E, quare planum H I in vnico puncto E solidi superficiem contingit, ac ideò hæc cadit tota infra planum H I. Quod probandum erat,

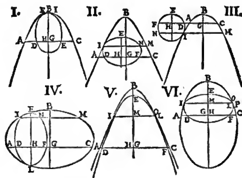
[b] 24. 25. pr. conic.

[c] 53. h.

THEOR. XXXVII. PROP. LVI.

Si coni-sectio, vel circulus coni-sectionem, vel circulum intus, vel extra, in vno, aut in duobus punctis contingat, & harum sectionum axes, vel sibi mutuò congruant, vel æquidistent, vtraque autem figura, altera immota, circa proprium axem conuertatur. Solidum factum ab vna sectionum nunquam secabit solidum ab altera genitum, sed omnino se mutuò contingent, vel in vnico puncto, si figurarum planarum contactus fuerit tantùm in puncto, siue axes congruant, siue æquidistent; vel in duobus tantùm, si ad duo puncta se mutuò contingant, dum axes sint paralleli; vel denique ad integram circuli peripheriam à contactibus genitam, si ad duo puncta sectiones simul occurrant, dum axes simul congruant.

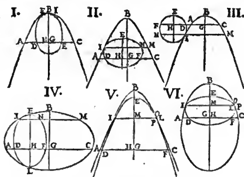
Sint duæ coni-sectiones ABC, DEF, quarum axes sint BG, EH, & vel simul congruant, vt in prima, quinta, & sexta figura, vel inter se æquidistent, vt in secunda, tertia, & quarta, atque se mutuò contingant, vel



in vnico puncto I, vt in prima, secunda, & tertia, vel in duobus tantùm I L, vt in quarta, quinta, & sexta; & concipiatur modò figurā ABC, manente alia DEF, circa axim BG conuerti; modò figurā DEF, manente altera, ita vt ab ipsis solida conoidalia, sphærica, aut sphæroidalia describantur. Dico talia solida nunquam simul secari, sed vel in vnico puncto I, in quo plana se contingunt, se quoque mutuò contingere in prima, secunda, & tertia, vel in duobus tantùm I, L, in quarta vbi axes BG, EH inter

se æquidistant: vel tandem ad integram circuli peripheriam à contactibus I, L in figurarum reuolutione descriptam in quinta, & sexta vbi axes simul congruunt.

Cum enim harum sectionum axes, vel congruant simul, vel æquidistent, quæ ad vnum ipsorum plana ducentur erecta, alteri quoque erecta erunt, describentque circulos in proprijs solidis, quorum centra in ipsis axibus cadent: vnde cum axes simul congruent, vt in prima, quinta, & sexta, huiusmodi circuli erunt concentrici; at si æquidistent, vt in reliquis, circuli erunt eccentrici, & communes sectiones horum planorum cum ipsis sectionibus A B C, D E F erunt eorundem circulorum diametri: quare ducto quocunque plano A D F C ad axes erecto, non per contactus I, vel L transeunte, efficiente verò in sectione A B C diametrum A C, in sectione autem D E F diametrum D F: patet in prima, secunda, quarta, quinta, & sexta figura, in quibus sectio D E F inscripta est sectioni A B C diametrum D F totam



cadere intra diametrum A C, ac ideo circulum ex D F in solido D E F disiunctum esse à circulo ex A C in solido A B C, vel per armillam A D C, vt in prima, secunda, & sexta, ob circulorum concentricitatem, vel per armillam excentricam A D C, in secunda, & quarta ob ipsorum circulorum excentricitatem. Rursus in tertia figura in qua sectio D E F tota cadit extra A B C, prædicta diameter D F tota cadet extra diametrum A C, ideoque circulus ex D F in solido D E F totus cadet extra circulum ex A C in solido A B C, & hoc semper: quare in singulis figuris vbicunque ductum sit planum A D F C, præter ad contactus, huiusmodi solida erunt in totum disiuncta, ex quo nullibi se mutuò secabunt.

Præterea cum in prima figura sectionum contactus sit in ipso axium vertice, patet, & solida circa communem axim ab ipsis sectionibus genita in eodem puncto se mutuò contingere. In secunda verò tertia, & quarta ducto plano ad axes erecto per punctum contactus I, in solido A B C efficiens circulum, cuius diameter sit I M, at in solido D E F circulum, cuius diameter sit

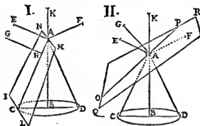
ter sit I N; patet tales circulos in ipso puncto I se mutuò contingere, ideoque, & solida in eodem contactus puncto I se tantùm contingere, & ob eandem ratione in quarta figura in altero contactus puncto L se contingent, &c. At in quinta, & sexta, in quibus sectiones sunt circa communem axim B G, & in duobus punctis I, L se contingunt, si ex contactu I ducatur communis applicata I M, & producatur, ipsa ad alterum contactus punctum L omnino pertinget; quoniam producta I M vtranque sectionem secans in O, P, est semi-applicata I M, in sectione A B C, æqualis semi-applicatæ I M, in sectione D E F, sed est M O in sectione A B C æqualis I M, & M P in sectione D E F æqualis eidem I M, ergo M O, M P sunt æquales, hoc est puncta O, P vnum, ac idem sunt; quare sectiones in puncto P simul conueniunt, sed conueniunt quoque in I, & in duobus tantùm punctis I, & L positum fuit eas simul occurrere, ergo punctum P idem est, ac punctum contactus L: quare I M L est communis sectionum applicata, per quam si ducatur planum ad axem erectum, efficiet in vtroque solido circulum, cuius diameter [a] erit eadem I L; itaque per huius circuli peripheriam à puncto I ex sectionum reuolutione descriptam, huiusmodi solida se cõtingent. Quod erat vltimò demonstrandum. [a] ex Command. cõment. in lib. Arch. de Conoid.

PROBL. VIII. PROP. LVII.

A puncto extra conum rectum dato ad eius conuexam superficiem, MINIMAM rectam lineam ducere.

Esto conus rectus, cuius axis A B. Oportet per punctum G datum extra conum ad eius conuexam superficiem *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Secetur conus, in vtraque figura, plano per axem A B, ac per datum punctum G transeunte, quod efficiat in superficie triangulum C A D: producatur axis B A in K; & cum anguli C A B, D A B sint æquales, & acuti, qui ipsis deinceps sunt C A K, D A K erunt æquales, & obtusi.



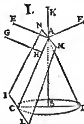
Fiant igitur ex vertice A anguli C A E, D A F recti, & primò sit datum punctum G in prima figura in altero rectorum angulorum, vt puta in ipso C A E, demittaturque ex G recta G H perpendicularis lateri A C (quæ, vt patet *MINIMA* est ad anguli latera, &c.) Dico ipsam G H esse *MINIMAM* quæsitam.

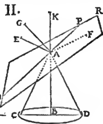
Concipiatur enim per rectam A C duci planum N I L M, quod rectum sit ad planum per axem D A C, in quo est recta G H.

Iam cum planum NL rectum fit ad planum DAC, cumque in plano NL fit GH communi planorum sectioni AC perpendicularis, erit ipsa GH ad idem planum NL recta [a] hoc est *MINIMA* [b] ducibilium à puncto G ad quodcunque aliud punctum eiusdem plani NL, sed conuexa coni superficies tota est infra planum NL, ipsum tantùm contingens [c] per rectam AC, quare eadem GH eò ampliùs *MINIMA* erit ad conuexam dati coni recti CAB superficiem.

a 4. def. 11. Elem.
b 52. h.
c 53. h.

Si autem datum punctum fuerit in ipsa perpendiculari EA, vt in E, eodem modo demonstrabitur EA rectam esse ad planũ NL, ideoque ad ipsum *MINIMAM*, & eò magis ad coni superficiem.





Si denique datum punctum G fuerit intra angulum EAF, vt in secunda figura. Iungatur GA, & hæc erit *MINIMA* quæsita.

Nam cũ angulus CAG sit maior recto, in plano per axem DAC, in quo est AG, fiat rectus angulus OAG, & linea OA producatur ad P: patet AP cadere inter AG, & AD cum angulus GAP sit rectus, & duo simul GAF, FAD recto sint maiores: (est .n. vnicus DAF rectus, ex constructione) itaque si per rectam OP concipiatur planum QR, quod rectum sit ad planum DAC, in quo est AG, ob rationem superiùs allatam, ipsa GA recta erit ad planum QR, hoc est *MINIMA*, [d] sed planum QR in ipso tantùm vertice A coni superficiem contingit, [e] quæ tota cadit ad inferiorem partem plani QR, quare eadem GA erit *MINIMA* ducibilium ex G ad conuexam coni superficiem. Ducta est ergo à puncto G extra conum rectum dato, &c. Quod faciendum erat.

d 52. h.
e 54. h.

PROBL. IX. PROP. LVIII.

A puncto extra Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum, vel Sphæram, aut Sphæroides dato, ad eius conuexam superficiem MINIMAM rectam lineam ducere.

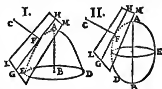
ESto Conoides Parabolicũ, aut Hyperbolicũ, in 1. figura, vel Sphęra, aut Sphęroides in secunda, cuius axis AB, & oporteat per pũctum C extra datum ad conuexam solidi superficiem *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Secetur datum solidum plano per axem AB, ac per datum punctum C, efficiente in superficie genitricem solidi sectionem DAE, ad cuius peripheriam ex puncto C ducatur [f] *MINIMA* linea CF. Dico hanc quoque esse *MINIMAM* ad conuexam dati solidi superficiem.

f 20. 22. 23. h.

Ducatur

Ducatur enim in plano secante D A E, per punctum F sectionem contingens G F H, quæ, (vti elicitur ex propositionibus 20. 22. ac 23. huius) cum *MINIMA* C F rectos angulos efficiet. Concipiatur denique per contingentem G H, ductum planū L M, quod ad planum D A E, in quo iam ponitur esse C F, rectum sit. Cum ergo plana L M, D A E, se mutuò secent per rectam G H, cui in plano D A E ducta est perpendicularis C F, erit ipsa C F, [a] recta quoque ad planum L M, siue ad idem planum ex puncto C erit [b] *MINIMA*; sed planum L M conuexam solidi superficiem contingit in puncto tantùm F, quę cadit [c] tota infra idem planum, ergo recta C F eò magis est *MINIMA* ad conuexam solidi superficiem D A E. Quod erat, &c.



[a] 4. def. 11. Elem.
[b] 52. h.
[c] 55. h.

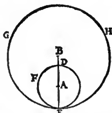
PROBL. X. PROP. LIX.

A puncto non intra sphæram dato, ad eius superficiem, MAXIMAM rectam lineam ducere.

Sit data sphæra, cuius centrum A, & oporteat per punctum B non intra sphæram datum, ad eius superficiē, *MAXIMAM* rectam lineam ducere.

Iungatur B A, & producatur, donec sphæricæ superficiei occurrat in D, & E. Dico B E, in qua est centrum, esse *MAXIMAM*.

Concipiatur per B E ductum planum, quod in spæræ superficie maximum circulum designabit D F E, ad cuius peripheriam est recta B E *MAXIMA*.



Iam in plano circuli D F E, cum radio B E descripto circulo G E H, & circa immotum axim B E reuoluto, ab ipso describetur sphæra G E H, quæ datam sphæram D F E circa eundem axim descriptam comprehendet, ac se simul continget in ipso [d] circulorum contactu E, sed quæ à centro B ad sphæricam superficiem G E H ducuntur omnes sunt æquales rectæ B E, ergo quæ ab eodem puncto B ad interioris sphæræ D F E superficiem ducentur ipsa B E minores erunt. Vnde B E est *MAXIMA* quæsita, &c. Quod erat, &c.

[d] 56. h.

PRO-

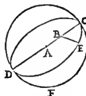
PROBL. XI. PROP. LX.

A puncto intra sphæram dato, ad eius concauam superficiem, MAXIMAM, & MINIMAM rectam lineam ducere.

ESto sphæra, cuius centrum A, & oporteat per datum intra ipsam punctum B ad concauam sphæræ superficiem *MAXIMAM*, & *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Si punctum B fuerit in centro sphæræ, patet tunc neque *MAXIMAM*, neque *MINIMAM* dari, cum omnes eductæ à centro ad sphæræ superficiem sint æquales.

Si autem datum punctum fuerit præter centrum: iungatur cum centro A recta B A, quæ hinc inde producta occurrat sphęricæ superficiei in punctis C, D. Dico B D, in quà est centrum, esse *MAXIMAM*, reliquam B C *MINIMAM*.



Si enim circà axim C D intelligatur quicunque *MAXIMUS* sphæræ circulus C D F: patet linearum ex B ad peripheriam C D F ducibilium, B D in qua centrum A, esse *MAXIMAM*, & B C *MINIMAM*.

Si verò ducta sit quælibet alia B E extra peripheriam C D F, sphæricæ superficiei occurrens in E; per rectas C D, & B E intelligatur planum, cuius communis sectio cum sphæræ superficie erit cuiusdam *MAXIMI* circuli peripheria C E D, & eius diameter C D: quare B D, in qua est centrum, cum sit *MAXIMA*, erit maior B E; & B C, cum sit *MINIMA* minor erit eadem B E, & hoc semper vbicunque pertingat ducta B E: ideoque B D est *MAXIMA* ad vniuersam sphæræ superficiem ducibilium ex dato puncto B, & B C *MINIMA*. Quod erat faciendum.

PROBL. XII. PROP. LXI.

A puncto intra Conum rectum, vel Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum dato, ad eius concauam superficiem, MINIMAM rectam lineam ducere.

ESto Conus rectus; vt in prima figura; vel Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum, vt in secunda, cuius axis A B, & oporteat per punctum intra ipsum datum ad concauam solidi superficiem *MINIMAM* rectam lineam ducere.

Secetur solidum plano per axem A B, ac per datum punctum ducto efficiente in solidi superficie sectionem D A E, quæ eadem erit, a ac ipsius solidi genitrix sectio, & in Cono angulum rectilineum constituet.

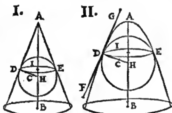
a ex Com ment. Cómand. in 11. Arch. de Conoid. & Sphęroid.

Iam si datum punctum fuerit in axe; vt in H; ducta H D, quæ in se-

ctione

ctione D A E fit *MINIMA*, (sed quæ in angulo, primæ figuræ, erit perpendicularis ad A D) ipsa H D erit quoque *MINIMA* in solido.

Nam si H D est *MINIMA* ad peripheriam D A E patet ex 20. 22. ac 23. huius, ipsam H D perpendicularem esse rectæ F D G, quæ ad punctum D sectionem contingat. Si ergo centro H, interuallo H D circulus describatur [a] D E B, ipse cadet totus intra sectionem, eam contingens tantùm in duobus punctis D E: quare in reuolutione sectionis D A E circa axim A B describetur datum solidum, & à circulo sphæra, quæ tota cadet intra solidum, eius concauam superficiem contingens [b] tantùm per peripheriam D I E eius circuli, qui in reuolutione describitur à puncto D; & ipsa H D, vna cum qualibet alia eductarum ab H ad prædictam peripheriam D I E, erit *MINIMA* in solido quæsita; cum hæ omnes sint æquales inter se, eò quod sint latera Coni recti, cuius basis est circulus D I E, vertex H; cumque omnes aliç eductæ ab H ad solidi superficiem, occurrant priùs sphçricæ superficiei (quæ cadit tota intra solidi superficiem) quàm superficiei conicæ, aut dati solidi conoidalis.



a 92. primi huius.

b 56. h.

Si verò datum punctum sit C inter axem, & sectionem: ducta item C D, quæ in sectione sit [c] *MINIMA*. Dico ipsam quoque esse *MINIMAM* in solido.

c 20 22. 23. h.

Cum enim C D sit *MINIMA* ad sectionis peripheriam D A E, ipsa C D erit contingenti F D G perpendicularis, quare, & producta axi [d] occurret, vt in H: quo facto centro, ac interuallo H D descripto circulo D E B, & facta reuolutione circa axim A B, procreabitur denuo datum solidum, & sphæra, cuius superficies cadet tota intra [e] solidi superficiem, sed recta C D est *MINIMA* [f] à puncto C ad sphæræ superficiem eductarũ; quare ipsa C D est omnino *MINIMA* ex C ducibilium ad concauam, & exteriorem solidi superficiem. Quod facere oportebat.

d 88. pr. h.

e 56. h.

f ex 60. h.

PROBL. XIII. PROP. LXII.

A puncto vbicunque dato, ad Sphæroidis superficiem, MAXIMAM, & MINIMAM rectam lineam ducere.

Schematismus 4.

Esto datum Sphæroides A B C D, cuius axis reuolutionis sit B D, centrum E, & punctum datum sit F. Oportet primò ex F ad Sphæroidis superficiem *MAXIMAM* rectam lineam ducere.

Pro huius lineæ indagatione, generalis constructio in singulis figuris quarti Schematismi, talis est.

Secetur Sphæroides A B C D plano per axem B D, ac per datum punctum F

ctum F ducto, sectionem efficiens in solido figuram ABCD, quæ semper est eadem, ac Ellipsis quæ solidum genuit; & à dato puncto F ad huius se-
a 23. h. ctionis peripheriam ducatur [a] *MAXIMA* linea. Dico ipsam quoque esse *MAXIMAM* ad solidi superficiem.

Iam, vel datum Sphæroides est Oblongum, vt in 9. primis figuris; vel Prolatum, vt in totidem proximè sequentibus.

Si primum: vel datum punctum F idem est cum centro E, vt in prima figura, & tunc duo semi-axes maiores FB, FD erunt *MAXIMAE* ad Ellipsis peripheriam per 23. huius ad num. 1. Vel est in maiori axe BD, hoc est inter verticem, & centrum, vt in secunda, & tunc FD tantùm, in qua est centrum est *MAXIMA*, vt ad num. 4. & 5. Aut in ipso vertice B, vt in tertia, quo in casu FB, item est *MAXIMA*, vt ad num. 2. Vel in ipso maiori axe, extra tamen sectionem, vt in quarta, & tunc ipsa FD, in qua est centrum pariter est *MAXIMA*, vt ad num. 3. Vel est in minori axe AC, hoc est vel distans à vertice A per interuallum FA non minus dimidio recti, cuius transuersum est AC, vt in quinta figura, & tunc ipsa FA est *MAXIMA*, vt ad num. 6. Aut distat ab A per interuallum minus prædicto dimidio, vt in sexta figura, & sic duæ tantùm FH, FG sunt *MAXIMAE*, vt ad num. 7. Vel denique datum punctum F est inter axes, & hoc, vel in ipsa peripheria, vt in septima figura, vel intra, vt in octaua, vel extra, vt in nona, atque in his casibus vna tantùm duci potest ex F *MAXIMA*, vt ad num. 9. quæ sit FG.

Si autem Sphæroides fuerit Prolatum, vt in nouem proximis figuris eiusdem Schematismi, vel datum punctū est idem cum centro F, vt in 10. figura, & tunc duo semi-axes maiores FA, FC erunt *MAXIMAE* ad Ellipsis peripheriam. Vel est in maiori axe, & hoc vel inter centrum, & verticem C, vt in vndecima, vel in ipso vertice, vt in duodecima, vel extra verticem vt in decimatertia, quibus in casibus FA, in qua centrum, est *MAXIMA*. Vel est in minori axe distans à vertice B per interuallum non minus dimidio recti, cuius transuersum sit BD, vt in decima quarta figura, & tunc FB, vel FG est *MAXIMA*, vel distans à vertice B per interuallum minus prædicto dimidio, vt in decimaquinta, & tunc duæ sunt *MAXIMAE* FG, FH. Vel est inter axes, & hoc aut in ipsa peripheria, aut intra, aut extra, vt in 16. 17. & 18. in quibus vna tantùm FG est *MAXIMA*, quæ omnia ad præcitatos numeros propos. 23. huius sunt demonstrata. Si ergo in singulis figuris ad interuallum *MAXIMAE* repertæ FD, vel FG respectiuè, cum centro dati puncti F circulus describatur, ipse cadet totus extra Ellipsim, hanc tantùm contingens in eò puncto, vel in ijs duobus ad quę *MAXIMA*, vel *MAXIMAE* perueniunt; nam si circulus alibi cum Ellipsi conueniret *MAXIMAE* quoq; plures essent quàm vna, vel duæ respectiuè, quod est contra ostensa in 23. huius.

Præterea, vbi F centrum descripti circuli GH non est in BD axe reuolutionis Ellipsis ABCD, vti reperitur in 1. 2. 3. 4. 10. 14. ac 15. figura, in quibus eadem BD est circuli diameter, ducatur IFL diameter circuli GH, atque axi BD ęquidistans; & concipiatur, modo circulum circa diametrum IL, tanquam circa axim conuerti, interea manente Ellipsi, & fiet sphæra GH, modò Ellipsim circa axim BD, manente tamen circulo, & procreabitur
b 56. h. Sphæroides ABCD, quod cadet totum intra sphæram, hanc [b] tantùm contingens,

ad vnicum punctum D, aut G, vt in 2.3.4.5.7.8.9. 11. 12.13.14. 16. 17. ac 18. figura, quoniam in his quoque vnicus est contactus inter circulũ, & Ellipsim; vel ad duo tantùm puncta B, D, vt in prima, aut G, H, vt in sexta, in quot circulus Ellipsim contingit, & quæ non sunt extrema eiusdem applicatæ in vtraq; sectione ad communem axim; vel tandem ad integram circuli peripheriam à puncto A in decima figura, vel à puncto G in 15. ex figurarum reuolutione circa communem axim B D descriptam. Cum ergo Sphæra G H claudat Sphæroides A B C D, atque ipsum contingat tantùm, vel in vno, vel in duobus punctis, vel ad integram circuli peripheriam, cũq; omnes rectæ, quæ à centro F ad punctum sphæricæ superficiei duci possunt sint æquales ijs, quæ ad prædicta contactuum pũcta, vel peripherias ducuntur, ideò quæ ab eodem centro ad inclusam Sphæroidis superficiem, præter ad prædicta puncta, vel peripherias ducentur minores erunt, ac propterea ipsæ eductæ à centro F, siue à puncto dato ad prędicta puncta, vel peripherias in Sphæroidis superficie erunt *MAXIMAE* quæsitæ. Quod erat primò faciendum.

SI verò ad Sphæroidis superficiem A B C D ducenda sit *MINIMA* linea à puncto dato F. Vel datum punctum est in ipsa superficie, & tunc *MINIMA* in punctum abit. Vel cadit extra, & tunc *MINIMA* reperitur, vt in 58. huius. Vel tandem est intra Sphæroides, & tunc ad *MINIMAM* venandam generalis constructio est huiusmodi.

Secetur Sphæroides plano per axem B D, & per datum punctum F, genitricem Ellipsim efficiente A B C D, ductaque ex F ad Ellipsis peripheriam *MINIMA** recta linea, ipsa quoque erit *MINIMA* ad Sphæroidis superficiẽ.

Iam, vel datum Sphæroides est Oblongum, vel Prolatum. Sit primò Oblongum, vt in figuris 19. 20. 21. 22. 23. Itaque datum punctum F, vel est in centro, vt in 19. & tunc duæ F A, F C, sunt *MINIMAE*, vel in maiori axe A B distans à vertice B per interuallum maius dimidio recti, &c. itemque duæ F G, F H sunt *MINIMAE*, vt in 20. vel per interuallum non maius prædicto dimidio, vt in 21. & tunc vnica F B, in qua non est centrũ, est *MINIMA*; vel est in minori axe, vt in 22. in qua F C vbi centrum non reperitur est *MINIMA*; vel tandem est inter axes, vt in 23. & tunc vnica F G est *MINIMA*, &c. *23. h.

Sit denique Sphæroides Prolatum, vt in postremis figuris huius quarti Schematismi. Si punctum F congruit cum centro E, vt in 24. figura duæ F D, F B sunt *MINIMAE*; si est in semi-axe maiori E C, distans à C per interuallum maius recti dimidio, &c. vt in 25. duo item F G, F H sunt *MINIMAE*; si per interuallum non maius prædicto dimidio, vt in 26. vnica F C est *MINIMA*; si in semi-axe minori E B, vt in 27. ipsa F B, in qua non est centrum est *MINIMA*; si tandem inter axes, vt in 28. vnica F G est *MINIMA*, quæ omnia in prop. 23. huius sunt demonstrata.

Si ergo in his omnibus figuris cùm centro F, ad interuallum nuper inuentæ *MINIMAE* describatur circulus G H, ipse circumscriptus erit Ellipsi, hanc tantùm contingens in eo, vel in ijs punctis, ad quæ *MINIMA*, vel *MINIMAE* peruenirint; nam si alibi cum Ellipsi conuenirent, *MINIMAE* plures essent, quàm esse possint. Itaque in circulis figurarum 22. 23. 25. 26.

28. in quibus eorum centra non sunt in B D axe reuolutionis Ellipsis, prout sunt in reliquis, ducatur per centrum F diameter I L eidem axi B D æquidistans, & concipiatur, tum circulum, tum Ellipsim conuerti eadem arte, qua superiùs vsi sumus, non absimili ratiocinatione, atque ope 56. huius, ostendetur inclusam Sphæram Sphæroides contingere, vel in vnico puncto, vt euenit in 21.22.23.26.27. ac 28. vel in duobus tantùm, vt in 24. & 25. vel ad integram circuli peripheriam, vt in 19. & 20. ideoque omnes rectas, quæ à centro F ad puncta Sphæricæ superficiei ducuntur, æquales esse ijs, quæ ad prædicta contactuum puncta, vel ad peripherias ducuntur, ac propterea, quæ ad circumscriptam Sphæroidis superficiem, præter ad eadem puncta, vel peripherias ducentur, maiores erunt. Vnde ipsæ eductæ, à dato puncto F ad reperta contactuum puncta, vel ad peripherias super dati Sphæroidis superficiem erunt *MINIMAE*. Quod vltimò faciendum erat.

MONITVM.

Miraberis fortaſſe, ac non immeritò, proximas haſce quinque propoſitiones circa planas portiones verſantes, & immediatè poſt quadrageſimam quintam huius aptè apponendas, locum hunc inter ſolida ſortitas fuiſſe: ſed inuitam, vel fortuitam potiùs huius tranſmiſſionis cauſam, hìc tibi enarrare ſuperuacaneum puto. His itaque vtaris prout ſuo loco inſertis; nulla namque ipſarum indiget aliqua præcedentium vſque ad num.46. incluſiuè, licet ſola quinquageſima prima nonnullarum ſequentium notionem aſſumat.

THEOR. XXXVIII. PROP. LXIII.

Conuersum Prop.40.h.

Æquales portiones eiusdem coni-sectionis, vel circuli, si fuerint de eadem Parabola habebunt intercepta diametrorum segmenta inter se æqualia. Si de eadem Hyperbola, vel Ellipsi, vel circulo, prædicta diametrorum segmenta erunt proprijs semi-diametris proportionalia.

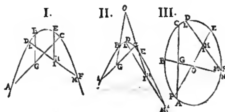
SInt, in quacunque harum figurarum, duæ portiones A B C, D E F inter se æquales, quæ in sectione Ellipsis tertiæ figuræ sint primò minores semi-Ellipsi, & harum omnium segmenta diametrorum sint B G, E H, tùm in Parabola primæ figuræ, tùm in reliquis, quarum centrum sit O. Dico, in prima, segmenta E H, B G inter se æqualia esse, in reliquis verò, esse vt H E ad E O, ita G B ad B O.

Ex altera diametrorum, vtputa ex E H, secetur, in prima figura, E I æqualis segmento B G; & in reliquis, fiat O E ad E I, vt O B ad B G, atq; in omnibus ordinatim applicetur per I ipsi diametro E I recta L I M, quæ

rectæ

rectæ DHF æquidistabit, cum & hæc quoque sit eidem diametro ordinatim ducta.

Iam in singulis figuris erit portio LEM æqualis a portioni ABC, sed est quoque portio DEF eidem portioni ABC æqualis, ex hypothesi, quare duæ portiones LEM, DEF inter se æquales erunt, sed vtraque est de eadem sectione, & circa communem diametrum EHI, & super bases parallelas, ergo basis LIM tota congruet cum basi DHF, vnde & punctum I cum puncto H; quare segmenta EI, EH inter se æqualia erunt, ac propterea erit, in prima, segmentum quoque EH æquale BG, & in reliquis erit HE ad EO, vt GB ad BO. Quod primò ostendere proponebatur. a 40. h.



Sint iam in tertia figura duæ portiones æquales ANC, DPF semi-Ellipsi maiores, quarum segmenta diametrorum sint GN, HP, & commune centrum O. Dico item esse GN ad NO, vt HP ad PO.

Producantur diametri NG, PH, ad B, E.

Et cum portiones ANC, DPF sint æquales, & semi-Ellipsi maiores erunt quoque reliquæ ABC, DEF de eadem Ellipsi inter se æquales, sed semi-Ellipsi minores; quare erit, vt supra ostendimus, GB ad BO, vt HE ad EO, & conuertendo, & diuidendo OG ad GB, vt OH ad HE, & est GB ad BO, vel ad ON, vt HE ad EO, vel ad OP, ergo, ex æquali GO ad ON, vt HO ad OP, & componendo, GN ad NO, vt HP ad PO. Quod vltimò erat, &c.

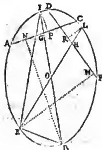
THEOR. XXXIX. PROP. LXIV.

Portiones eiusdem coni-sectionis, vel circuli, aut etiam anguli rectilinei, quarum intercepta diametrorum segmenta in Parabola sint æqualia, vel in Hyperbola, aut in Ellipsi, vel circulo, ad proprias semi-diametros eandem simul habeant rationem, vel in angulo pertingant ad eandem inscriptam concentricam Hyperbolen, habent bases altitudinibus reciprocè proportionales.

NAm, quo ad primùm, reiterata inspectione figurarum tertij Schematismi pro propositione 40. huius; ibi in portionibus A B C, H E I, tùm quandò, in Parabola, diametri B F, E G sint æquales; tùm quandò, in reliquis sectionibus, sit semi-diameter D B ad B F diametrum portionis A B C, vt semi-diameter D E, ad E G diametrum portionis H E I, demonstratum fuit, propè finem, basim H I portionis H E I, ad basim A C portionis A B C, esse reciprocè, vt altitudo portionis A B C ad altitudinem portionis H E I. Quod tanquam Coroll. Prop. 40. huius elici poterat. At cum ibi tantùm loquatur de portionibus Ellipticis, quæ sint semi-Ellipsi minores, hoc idem verificari etiam de portionibus semi-Ellipsi maioribus, vel etiam de ijsdem semi-Ellipsibus, ita demonstrabitur.

Schematismus 3.

Sint duæ portiones A B C, D E F de eadem Ellipsi, cuius centrum O; vtraque verò sit semi-Ellipsi maior, quarum diametri G B, H E ad proprias semi-diametros B O, E O sint in eadem ratione. Dico, basim A C vnius, ad D F basim alterius, esse vt huius altitudo E M, ad illius altitudinem B N.



Productis enim diametris B G, E H vsq; ad Ellipsis peripheriam in punctis I, L, è quibus ductis I P, L R, basibus A C, D F perpendicularibus, hæ erunt altitudines portionum A I C, D L F, & reliquarum portionum altitudinibus, B N, E M æquidistabunt.

Et cum, ex hypothesi, sit G B ad B O, vt H E ad E O, sumptis consequentium duplis, conuertendo, & per conuersionem rationis B I ad I G, erit vt E L ad L H; & sumptis antecedentium subduplis, O I ad I G, vt O L ad L H: quare, per superiùs ostensa, in portionibus A I C, D L F, semi-Ellipsi minoribus, erit basis A C ad D F, vt altitudo L R ad altitudinem I P, sed L R ad I P est, vt E M ad B N, vt mox demonstrabitur, ergo A C ad D F erit quoque, vt E M ad B N.

Quod autem sit L R ad I P, vt E M ad B N. Cum demonstratum sit esse

esse E L ad L H, vt B I ad I G, erit diuidendo, & conuertendo L H ad H E, vel L R ad E M (ob triangulorum L H R, E H M similitudinem) vt I G ad G B, vel ita I P ad B N (ob similitudinem triangulorum I G P, B G N) & permutando L R ad I P, vt E M ad B N. Quod reliquum erat ostendere de portionibus semi-Ellipsi maioribus.

Tandem intelligantur duæ semi-Ellipses I E B, E B L de eadem Ellipsi. Dico basim I B ad basim L E esse reciprocè, vt altitudo portionis E B L ad altitudinem portionis I E B.

Iunctis enim E I, E B; cum in triangulis I E O, B E O, quorum communis vertex E, sit basis I O æqualis basi B O, erit triangulum I E O, triangulo B E O æquale; & si concipiatur basis trianguli B E O permutari, ita vt ipsa sit O E, & vertex B: cum huiusmodi triangula sint æqualia, erit basis I O, vnius I E O, ad basim O E, alterius B E O, ita reciprocè altitudo trianguli B E O, cuius vertex B, ad altitudinem trianguli I E O, cuius vertex E; sed horum triangulorum altitudines sunt eædem, ac semi-Ellipsium E B L, I E B, ergo I O ad O E, vel sumptis duplis, basis I B ad basim L E, erit reciprocè, vt altitudo semi-Ellipsis E B L ad altitudinem semi-Ellipsis I E B.

Quò autem ad portiones eiusdem anguli, super figuram primam Propos. 45. huius, in qua diametri B E, M D portionum, siue triangulorum A B C, H M I pertingunt ad eandem Hyperbolen D E concentricam, cum ibi demonstratum sit ipsa triangula inter se esse æqualia, erit basis A C vnius, ad H I basim alterius, vt altitudo trianguli H M I ad altitudinem trianguli A B C: hoc enim elicitur ex elementis, nam triangula æqualia habent bases altitudinibus reciprocè proportionales. Quare portiones eiusdem coni-sectionis, &c. Quod erat, &c.

THEOR. XL. PROP. LXV.

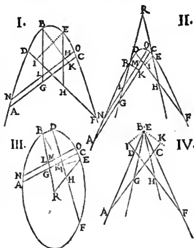
Æquales portiones eiusdem coni-sectionis, vel circuli, aut etiam anguli, habent bases altitudinibus reciprocè proportionales. Et è conuerso.

Si portiones de eadem coni-sectione, vel circulo, aut etiam angulo habuerint bases altitudinibus reciprocè proportionales, ipsæ portiones æquales erunt.

1. Etenim, quò ad primùm, quandò portiones de eadem coni-sectione, vel circulo, aut etiam angulo sunt æquales, si fuerint de eadem Parabola, habent intercepta diametrorum segmenta inter se æqualia, & si de eadem Hyperbola, vel Ellipsi, vel circulo habent segmenta proprijs semi-diametris *a* proportionalia (nam si fuerint de eodem angulo propositum satis constat, ex Elementis;) sed quandò huiusmodi portionibus insunt conditiones prædictæ, ipsæ habent *b* bases altitudinibus reciprocè proportionales, ergo, & cum fuerint equales, ipsarum bases altitudinibus erunt reciprocæ. a 63. h. b 64. h.

cæ. Quod erat primò, &c. quodque tanquam præostensum bis assumpsimus in 51. h.

2. PRo demõstratione autẽ cõuersi huius, ponantur portiones A B C, D E F de eadem coni-sectione, in primis tribus figuris, (quę tamen in tertia sint semi-Ellipsi minores) vel de eodem angulo, vt in quarta, quarum omniũ diametri sint G B, H E, bases A C, D F, altitudines verò B K, E I, centrum autem in secunda, & tertia sit R: sitque basis A C ad basim D F, reciprocè, vt altitudo E I ad altitudinem B K. Dico ipsas portiones inter se æquales esse.



Nam si segmenta diametrorum B G, E H, in prima exhibente Parabolen, fuerint æqualia; & in secunda, ac tertia exhibentibus Hyperbolen, & Ellipsim, habuerint ad proprias semi-diametros B R, E R eandem rationem iam patet, per 40. huius, ipsas portiones inter se æquales esse.

At si inter hæc diametrorum segmẽta non est prædicta æqualitas in prima figura; vel proportionalitas, in secunda, & tertia, alterum ipsorum segmẽtorum erit æquo maius. Sit ipsum B G, & ad æquum reducatur in L: erit ergo B L minus B G, cui per L ordinatim applicetur N L O (quæ basi A C æquidistabit) altitudinem B K secans in M; & erit B M altitudo portionis N B O.

Iam, diameter L B, in prima, facta est æqualis diametro H E; in secunda verò, & tertia nũc ponitur L B ad B R habere eandem rationem quàm H E ad E R, ergo per primam partem huius, erit basis N O ad D F, vt altitudo E I ad B M; vnde rectangulum sub N O, B M æquabitur rectangulo sub D F, E I; sed est, ex hypothesi, basis A C ad D F, vt altitudo E I ad B K, ergo, & rectangulum sub A C, & B K, æquabitur eidem rectangulo sub D F, & E I; quare duo rectangula sub N O, & B M, & sub A C, & B K sunt æqualia, quod est falsum. Rectangulum enim sub N O, B M minus est rectangulo sub A C, B K, eò quod sub minoribus lateribus contineatur, cum sit applicata N O minor applicata A C, & altitudo B M minor altitudine B K: quapropter ipsa diametrorum segmenta, in prima, æqualia erunt; & in re-

& in reliquis, erunt proprijs semi-diametris proportionalia, hoc est ipsæ portiones æquales [a] erunt. De portionibus tandem eiusdem anguli, quæ sunt triangula, iam notum est, quandò bases ipsorum altitudinibus sint reciprocè proportionales, ipsa triangula esse æqualia. Quare, &c. quod secundò probandum erat. [a] 40. h.

Haud incongruum, neque inutile duximus hic adnotasse Theorema huiusmodi.

THEOR. XLI. PROP. LXVI.

Æquales portiones eiusdem coni-sectionis, vel circuli (quæ tamen in Ellipsi sint, vel vnà æquales, vel vnà maiores, vel vnà minores semi-Ellipsi) ad inscripta sibi triangula, (nempè ad ea, quorum bases eædem sunt, ac portionum, eædemque altitudines, siuè ijdem vertices) vel ad circumscripta parallelogramma, sunt inter se in vnà, eademque ratione.

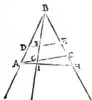
NAm cum bases æqualium portionum eiusdem coni-sectionis, vel circuli earum altitudinibus sint [b] reciprocæ, bases quoque inscriptorum triangulorum, eorum altitudinibus reciprocabuntur, cum vtrobique altitudines, & bases ponantur eædem; ac propterea ipsa triangula æqualia erunt. Quare, vt portio ad portionem, ita triangulum ad triangulum, ob æqualitatem tùm portionum, tùm triangulorum; & permutando, portio ad sibi inscriptum triangulum, vt altera æqualis portio de eadem coni-sectione, vel circulo ad sibi inscriptum triangulum. Et sumptis consequentium duplis, portio ad circumscriptum parallelogrammum, erit vt altera portio ad circumscriptum parallelogrammum. Quod erat, &c. [b] 65. h. ad num. 1.

Hoc de solis Parabolæ portionibus, etiam si inæqualibus, nec de eadem Parabola, manifestum iam erat ex Archimede (omnis enim Parabolæ portio ad sibi inscriptum triangulum habet [c] rationem sesquitertiam.) De reliquarum autem coni-sectionum æqualibus portionibus, non dum. [c] 17. pr. h.

LEMMA XIII. PROP. LXVII.

Si in angulo A B C applicatæ ſint duæ rectæ lineæ D E , A C , quæ ab eadem recta B G per verticem B ducta proportionaliter ſecentur, ita vt ſit A G ad G C, homologè, vt D F ad F E. Dico ipſas A C, D F inter ſe æquidiſtare.

SI enim A C non eſt ipſi D E parallela, ſit alia applicata A H, ſecans B G in I: erit ergo (ob parallelas) A I ad I H, vt D F ad F E; vel ob hypotheſim, vt A G ad G C, ergo in triangulo A C H erit I G parallela ad H C, ſed ipſæ conueniunt in B. Quare non erit alia ex A ipſi D E parallela, quàm A C. Quod erat, &c.



THEOR. XLII. PROP. LXVIII.

Baſes æqualium portionum, ex eodem angulo, ſiue ex eadem
Conuerſum Prop. 45. h. quacunque coni-ſectione, vel circulo abſciſſarum, eandem inſcriptam eiuſdem nominis ſectionem ſimilem, & concentricam ad puncta media contingunt.

SInt de angulo rectilineo, vt in prima figura, vel de qualibet alia coni-ſectione, vel circulo, vt in ſecunda, abſciſſæ duæ æquales portiones A B C, D E F, quarum baſes A C, D F ſint bifariam ſectæ in G, H, & per G
a 4. ſec. conic & 5 6.7. p. h. inſcribatur [a] eiuſdem nominis ſectio ſimilis, & concentrica exteriori A B F, quæ ſit I G H. Dico baſim A C ſectionem I G H contingere in G, & baſim quoque D F eandem ſectionem contingere in H.

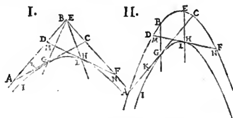
Iungatur, in prima, B G, & producatur, nam ipſa erit diameter Hyperbolæ I G H (cum ſit B eius centrum) bifariam ſecans omnes in ea applicatas, quæ ſi vſque ad aſymptotos producantur, erunt, & ipſarum ſegmenta
b 8. ſecũd. conic. inter aſymptotos, & ſectionem æqualia [b] inter ſe, quare ſi ipſa ſegmenta concipiantur addita æqualibus ſemi-applicatis in ſectione eis in directum poſitis, prouenient totæ applicatæ in angulo A B E bifariam ſectæ à diametro B G producta, ſed ponitur quoque applicata A C bifariam ſecta in
c 67. h. G, quare A C ipſis applicatis in ſectione [c] æquidiſtabit, ac ideò ſectionem
d 32. primi conic. I G H continget [d] in G.

In ſecunda autem figura quaſcunque coni-ſectiones exhibente ducatur ex G diameter G B, quæ vtriuſque ſectionis A B E, I G H erit communis diameter (cum ipſæ ponantur ſectiones concentricæ, &c.) ad applicatas in

ipſis

ipsis æqualiter inclinata; quare applicatæ in sectione I G H ad diametrum B G æquidistabunt applicatis in sectione A B C ad eandem diametrum, quarum vna est A C per verticẽ G ducta, cum in G sit bifariam secta; ergo ipsa A C continget [a] in G sectionem I G H. [a] ibidem.

Sed hoc idem breuiùs, tùm in angulo, tùm in qualibet coni-sectione, omisso precedenti Lemmate.



COncedatur sectionem I G H occurrere rectæ A C in alio puncto quàm G, quod sit K. Dico tamen punctum K idem esse ac G.

Quoniam erit A K [b] æqualis G C, sed est quoque A G æqualis eidem G C, ergo A K, & A G sunt æquales, sed hæ habent communes terminos ad A, ergo, & punctum K congruet cum G. Quare ipsa basis A C contingit omnino sectionem I G H in G. [b] 8. sec. conic. & ex 1. Coroll 46. h.

Ampliùs, in prima figura, iungatur E H, quæ est [c] diameter inscriptæ Hyperbolæ I G H, & in secunda ex H ducatur vnius sectionis diameter H E, quæ erit quoque diameter alterius (cum ponantur concentricæ, &c.) Si ergo hæc diameter E H producatur, ipsa secabit interiorem sectionem I G H in aliquo puncto, vt in L, ex quo ducatur in sectione A B F recta M L N ipsi D F æquidistans. [c] 8. pr. h.

Et quoniam, in singulis, figuris D F est bifariam secta in H, erit quoque M N bifariam secta in L (cum M N ex constructione æquidistet ordinatim ductæ D F in eadem sectione A B F) sed sectio I G transit per L, quare sectio ipsa I G continget omnino rectam M N in L (quod iisdem rationibus, ac supra de A C ostensum fuit, demonstrabitur) ergo portio M E N æquabitur [d] portioni A B C, sed portio quoque D E F æquatur eidem portioni A B C, ex hypothesi, quare portiones M E N, D E F inter se æquales erunt, suntque de eodem angulo, vel de eadem coni-sectione, vel circulo, & circa communem diametrum E H L, & ipsarum bases simul æquidistant, qua propter, & bases quoque simul in totum congruent, nempe M N cum D F, ac ideò punctum L cum puncto H. Recta igitur D F, quæ eadem est cum M N, contingit sectionem I G in H. Quod tandem erat demonstrandum. [d] 45. h.

COROLL. I.

HInc elicitur, quod basis angularis portionis, vel basis cuiuslibet coni-sectionis, vel circuli ad punctum medium contingit eiusdem nominis sectionem similem, & concentricam per ipsum punctum dato angulo, vel sectioni, aut circulo inscriptam.

Nam primò loco superius demonstratum fuit, in vtraque figura, basim AC ad eius punctum medium G omnino contingere sectionem IGH per punctum G concentricè inscriptam, &c.

COROLL. II.

SEquitur etiam, quod segmenta diametrorum, omnium æqualium portionum ex eodem angulo, aut ex eadem coni-sectione, vel circulo abscissarum, cum earum extremis terminis ad basim, perueniunt ad eandem eiusdem nominis, similem, & inscriptam concentricam sectionem.

Etenim puncta media basium ipsarum portionum, quæ iam eandem similem inscriptam concentricam sectionem contingunt, eadem sunt, ac prædicta diametrorum extrema puncta, &c. vt satis constat.

MONITVM.

OPportunè monendus hic Lector est, nos superiùs, & in sequentibus, Hyperbolen intra angulum asymptotalem descriptam, & Parabolen Parabolæ æquidistantem, interdum nuncupasse similes, & concentricas sectiones, perindè ac si angulus rectilineus asymptotalis, sectio esset similis, & concentrica Hyperbolæ, & quasi Parabole æquidistanti Parabolæ concentrica esset. Verum si id accuratius perpendamus, quo ad angulum rectilineum, animaduertere licebit ipsum non abs re haberi posse tanquam vnam Hyperbolarum, quarum centrum sit vertex eiusdem anguli, & asymptoti sint eadem anguli latera: Omnes enim Hyperbolæ cum iisdem asymptotis, siue cum eodem centro descriptæ, sed cum diuersis semi-axibus, inter se similes sunt, vti ex doctrina primi huius iam satis patuit; & quò semi-axes sunt minores, eò tales Hyperbolæ fiunt angustiores (nempe inscriptibiles per vertices iis, quarum semi-axes sint maiores) sed tantò magis accedunt ad latera eiusdem anguli, nunquam tamen eis occurrunt, & in hoc semi-axium decremento, peruenitur tandem ad MINIMVM, nempe ad punctum, seu verticem anguli, qui est centrum omnium similium Hyperbolarum, & ad MINIMAM Hyperbolen,

hoc

hoc est ad omnium similium, & concentricarum angustissimam, cum ipsis anguli lateribus, seu cum asymptotis in totum congruentem. Itaque angulus rectilineus vocari quodammodo potest prima, & MINIMA similium Hyperbolarum concentricarum, quarum angulus asymptotalis sit aequalis dato, & quaelibet praedictarum similium Hyperbolarum inscriptarum dici potest sectio eiusdem nominis cum angulo similis, & concentrica, &c. quales meritò appellantur duae Hyperbolae, vel duae Ellipses inter se similes, & concentricae.

Quò autem ad congruentes Parabolas, vel etiam non congruentes, (omnes enim Parabolae sunt similes inter se) sed per diuersos vertices simul adscriptas, quas alibi aequidistantes diximus, liceat etiam, quamuis impropriè, concentricas appellare. Etenim, & Parabole suum habet centrum à quo procedunt eius diametri, sed cum id positum sit in infinitam distantiam extra sectionem, ideò ipsae diametri ab eodem centro emanantes inter se aequidistant, &c.

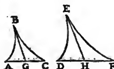
Ob easdem quoque rationes, si concipiantur Hyperbolae intra angulos asymptotales, vel Parabolae aequidistantes; vel Hyperbolae, aut Ellipses, vel circuli similes, & concentrici circa communes axes in gyrum conuersi, solida ab ipsis genita vocabuntur in posterum solida eiusdem nominis similia, & concentrica. Conus enim ab angulo procreatus habebitur pro primo, & MINIMO Conoidorum Hyperbolicorum similium, & concentricorum, &c. & Conoidalia Parabolica tanquam simul concentrica, quarum commune centrum abeat in infinitam distantiam. De similibus verò, & concentricis Conoidibus Hyperbolicis, aut Sphaeroidibus, vel Sphaeris, à similibus, & concentricis sectionibus genitis, nihil est quod ad nominum declarationem addamus, cum eadem definitio ipsi definito perquàm rectè conueniat. Verumenimuerò iam suscepta, ac nuper intercisa solidorum tractatio, antequam resumatur, nouarum quarundam vocum explicationem requirit, quam ideò in sequentibus ita exhibemus.

DEFINITIONES.

I.

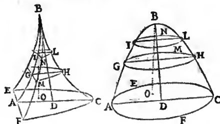
PLANA ACVMINATA SIMILIA vocentur illa, quæ inter se sint proportionalia, & quarum diametri super bases sint æqualiter inclinatæ, ac ijsdem basibus proportionales.

Hoc est si sint duo quælibet plana Acuminata proportionalia ABC, DEF, quorum diametri BG, EH cum basibus AC, DF æquales angulos alterum alteri constituant, nempe AGB ipsi DHE, & qui ei est deinceps CGB reliquo FHE sit æqualis, sitque diameter B G ad basim AC, vt diameter EH ad basim DF; huiusmodi plana inter se vocentur SIMILIA ACVMINATA. Vnde, & duæ similes Ellipses vocari poterunt similia Acuminata, cum vtraque ex duobus proportionalibus Acuminatis constet, siue ex duabus semi-Ellipsibus, per diametros æqualiter inclinatas dissectis, quarum diametri sunt basibus proportionales, &c. Idemque de duobus circulis, &c.



II.

SOLIDVM ACVMINATVM REGVLARE, vel tantùm SOLIDVM ACVMINATVM, voco omnem figuram solidam ad alteram partem deficientem, circa planum Acuminatum descriptam, cuius omnia plana basi solidi æquidistantia per Acuminati applicatas ducta, sint quoque plana Acuminata, eidem basi, ac inter se similia, & similiter posita, & quorum homologæ diametri sint ipsæ applicatæ prædicti Acuminati, &c.



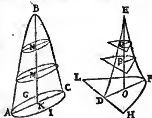
Esto planum quodcunque Acuminatum ABC, cuius basis AC, diameter BD, vertex B, & ipsa AC, sit vel diameter circuli, aut Ellipsis, vel cuiuscunque ipsarum figurarum portionis, aut diameter Parabolæ, vel Hyperbolæ, vel cuiuslibet alij plani Acuminati A E C F, quod tanquam basis, ad quemlibet inclinationis angulum cum plano A B C sit dispo-

dispositum, sintque omnia plana G M H, I N L, &c. quæ basi A E C F æquidistanter ducuntur per Acuminati A B C applicatas G H, I L, &c. ipsi basi, ac inter se, similia Acuminata, & similiter posita, atque ipsæ applicatæ G H, I L sint eorundem Acuminatorum homologæ diametri: huiusmodi figura SOLIDVM REGVLARE ACVMINATVM vocetur, vel tantùm ACVMINATVM SOLIDVM; A E C F verò BASIS solidi Acuminati; sed portionem A B C Acuminati plani intra Acuminatum solidum interceptam (eò quod ipsa sit tanquam Regula, vel Modulus, aut Canon homologarum diametrorum similium planorum æquidistantium, ac solidum procreantium) nuncupare liceat CANONEM solidi Acuminati, qui si ad planum basis A E C F rectus fuerit, dicatur CANON RECTVS solidi Acuminati, & B D diameter Canonis, nuncupetur quoque AXIS solidi, & eius VERTEX punctum B, in quod abit solidum, atque eiusdem solidi ALTITVDO dicatur recta B O, quæ à vertice B super basim A E C F recta ducitur. Plana verò A C, G H, I L, &c. dicantur PLANA ORDINATIM DVCTA ad axim solidi Acuminati.

III.

SOLIDA ACVMINATA PROPORTIONALIA dicantur illa, quorum omnia plana ordinatim applicata per puncta, eorum axes proportionaliter diuidentia, sint quoque inter se, & basibus proportionalia.

Videlicet si duo solida Acuminata A B C, D E F, quorum bases sint A G C I, L F H D axes verò sint B K, E O proportionaliter secti in M, P; & in N, Q; ita vt K M, ad M B sit vt O P, ad P E; & K N ad N B, vt O Q ad Q E, &c. sitque basis A G C ad basim L F H, vt planum ordinatim applicatum per M ad applicatum per P, & vt applicatum per N ad applicatum per Q, &c. talia solida, dicentur SOLIDA ACVMINATA PROPORTIONALIA.



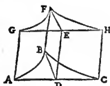
IIII.

Si super diametrum Acuminati plani descriptum sit parallelogrammum quodlibet super ipsum planum quomodocunque eleuatum, idemque Acuminatum concipiatur sibi ipsi æquidistanter moueri, ita vt eius diameter suo motu parallelo prædictum parallelogrammum describat: solidum occlusum à duobus oppositis Acuminatis congruentibus, ac parallelis, atque à superficie, quæ à perimetro figuræ motæ describitur CYLINDRICVS vocetur. Acuminatum verò solidum procreans, dicatur BASIS, & parallelogrammum, per quod fit æquidistans latio Acuminati plani Cylindricum procreantis, CANON DIAMETRALIS nuncupetur.

Nimirum, sit Acuminatum planum A B C, cuius diameter B D, cui insistat parallelogrammum quodcumq; B D E F super planum figuræ A B C

vtcunque

vtcunque eleuatum, concipiaturque Acuminatum A B C moueri motu sibi ipsi parallelo, sed ita vt recta BD æquidistanter incedat super parallelogrammum B E, donec congruat cum opposito latere E F. Huiusmodi solidum occlusum à parallelis, & congruentibus Acuminatis A B C, G F H, atque à superficie, quæ à perimetro A B C A in sua latione describitur, vocetur CYLINDRICVS, Acuminatum verò A B C eius BASIS, & parallelogrammum B E CANON DIAMETRALIS prædicti Cylindrici, cuius altitudo metietur per rectam ad vtrunque oppositorum planorum perpendicularem.



Itaque CYLINDRICVS dicetur omne solidum circa parallelogrāmum quodcunque descriptum, & cuius omnia plana basi solidi æquidistantia, ac per applicatas in parallelogrammo ducta, sint plana Acuminata, eidem basi, ac inter se æqualia, & similia, & similiter posita, & quorum homologę diametri sint ipsæ applicatæ in prædicto parallelogrammo; quod CANON DIAMETRALIS Cylindrici vocabitur.

Omittimus vniuersaliores Solidorum Acuminatorū, ac Cylindricorum definitiones, cum hoc loco de ijs sermo minimè habendus sit.

PROBL. XIV. PROP. LXIX.

Si Conoides quodcunque, vel Sphæra, aut Sphæroides oblongum, vel prolatum plano secetur ex dato solido portionem abscindens: possibile est per axem solidi, planum ducere, quod ad basim abscissæ portionis sit erectum. Item.

Possibile est basi portionis aliud planum æquidistans ducere, quod conuexam solidæ portionis superficiem contingat.

ESto quodcunque ex prædictis solidis A B C, cuius axis reuolutionis sit B D, atque ex eo per planum E H G I sit abscissa portio solida E F G, cuius basis E H G I (quæ, vel erit [a] Ellipsis, vel circulus.) Dico possibile esse basi E H G I planum ducere per solidi axem B D, quod ad basim E H G I rectum sit. Præterea possibile esse eidem basi aliud planum æquidistans ducere, quod solidæ portionis superficiem contingat.

Si enim planum secans E I G fuerit ad axem B D erectum, hunc secans in K, sectio circulus erit, [b] cuius centrum K; & si per axim B K agatur quodcunque planum E B G basim portionis E H G I secans per rectam E G, sectionis portio plana E B G erit [c] ea, quæ solidum genuit, cuius basis eadem E G, axis verò ipse B K, & ad basim E H G I recta [d] erit. Quod primò, &c.

[a] ex 13. 14. 15. Arch. de Conoi. &c.

[b] 12. Archim. ib. à Comād. restit.

[c] ibidem.

[d] 18. vnd. Elem.

Iam

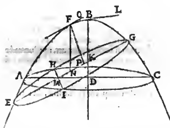
Iam si per verticem B ducatur in plano portionis E B G recta B L, ipsam portionem contingens, hæc basi E G [a] æquidistabit: & si per B L concipiatur planum duci, quod plano per axem E B G sit erectum, id solidæ portionis superficiem continget [b] in B, atque basi E H G I erit parallelum [c] cum vtrunque planorum sit eidem E B G rectum, & communes sectiones B L, E G sint parallelæ. Quod secundò, &c.

a 32. primi conic.
b 55. h.
c per Sch. Clauijpost 18. vndec. elem.

Si verò planum secans E H G I rectum non fuerit ad axem B D; (& tunc sectio [d] erit Ellipsis) secetur denuò datum solidum quocunque alio plano A H C I ad axem recto: (quod tamen non transeat per intersectionem axis B D cum plano E H G I, si hoc axem secuerit intra solidum) id in solido sectionem faciet [e] circulum, centrum habentem in axe B D, vti in D, omninò autem secabit basim E H G I per communem rectam H I tùm in Ellipsi, tùm in circulo applicatam, cui ex D, circuli centro, ducta perpendiculari D M; per axem B D, ac rectam D M agatur planum in solido efficiens genitricem sectionem E A B G C, cuius communis sectio cum circulo erit diameter A C, & cum Ellipsi erit recta E G.

d 13. 14. 15. Arch. de Conoi. &c.
e 12. Arch. ib. à Comād. rest.

Iam priùs ostendam sectionem hanc per B D axem ductam ad secans planum E H G I, siue ad basim solidę portionis E F G rectam esse. Quoniam cum planum circuli E H C I rectum sit ad planū per axem E A B C, cumq; linea I M in circulo perpendicularis sit ad A C horum planorum communem sectionem, erit eadem linea I M recta [f] ad planum per axem E A B C: quare omnia plana, quæ per ipsam ducentur ad idem planum E A B C recta erunt, [g] sed E H G I basis solidæ portionis transit per I M, ergo basis E H G I, siue planum secans rectum erit ad planum per axem E A B C, siue id rectum ad planum secans, hoc est ad basim solidæ portionis. Quod primò, &c.



f 4. def. vnd. Ele.
g 18. vnd. Elem.

Cum ergo E G sit communis sectio planorum, eius scilicet, quod solidū secat, & eius, quod per axem ducitur erectum super planum secans, ipsa E G erit [h] axis Ellipsis E H G I, qua bifariam secta in N, erit N Ellipsis centrum, ex quo, in plana portione E F G sectionis per axem à recta E G abscissæ, & super basim solidæ portionis erectæ, ducta diametro N F, & per F sectionem [i] contingente F O, per ipsam F O agatur planum, quod ad idem planum per axem E B G rectum sit, id solidæ portionis E F G superficiem contingit [l] in F, & basi E H G I æquidistabit. [m] Quod secundò, &c. Si fuerit ergo Conoides quodcunque, vel Sphæra, &c. possibile est, &c. Quod erat faciendum, ac demonstrandum.

h 13. 14. 15. Arch. de Conoi. &c.
i 2. & 4. pr. h.
l 55. h.
m Schol. Clauijpost 18. vndec. Elem.

SCHO-

SCHOLIVM I.

CVm huiusmodi solida portio E F G de quolibet prędictorum solidorum abscissa, sit solidum ad alteram partem F deficiens, circa Acuminatū planum E F G descriptum, cumque omnia plana eius basi E H G I æquidistantia, sint plana Acuminata, vt in prima proximè præcedentium definitionum monuimus, sintque omnia inter se [a] similia, ac similiter posita, eò quod vel sint circuli, vel Ellipses, quarum homologi axes sunt [b] eædem applicatæ in Acuminato E F G, idcircò per secundam prædictarum definit. talis solida portio in posterum vocari poterit aliquandò solidum Acuminatum; & planum Acuminatum, seu portio plana E F G, cum sit recta ad basim E H G I, dicetur Canon rectus solidæ portionis.

[a] Coroll. 15. Arch. de Conoi. &c.
[b] 13. 14. 15. ibid.

COROLL. I.

EX hac elicitur, qua methodo per axem cuiuslibet Conoidis, aut Sphæroidis, vel Sphæræ, aut etiam Coni recti duci possit planum, quod ad datum quodcunque planum non per axem ductum, & solidum secans, rectum sit, etiam si secans planum in Conoide Parabolico, aut Hyperbolic o, vel Cono non sit circulus, neque Ellipsis: simulque patet, quod prædictum planum per axem, aliud non per axem ductum omnino secat intra solidum: quæ omnia, vel leuiter perpendenti manifesta sunt ex dictis, quæque ab ipso Archimede tanquam possibilia, & iam nota passim supponuntur in libro de Conoid. &c.

SCHOLIVM II.

POterat quidem prima pars huius Problematis breuiùs persolui. Nam ex vertice B, vel ex quolibet alio axis puncto, super planum secans E H G I ducta perpēdiculari, per quàm, & per axem B D ducto plano; constat hoc idem super planum secans rectum [c] esse. Verùm cum sæpe eueniat, quod ipsa perpendicularis occurrat secanti plano non intra solidum, sed vel in eius superficie, vel extra, cumq; omnino ostendere opus sit, quod huiusmodi planum per axem, rectum ad planum secans, hoc idem planum secat semper intra solidum, idcircò prò huius Problematis solutione superiorem viam elegimus, quæ ad vtrunq; simul nos perduceret vnica constructione.

[c] 18. vnd. Elem.

COROLL. II.

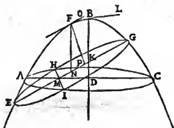
COlligitur quoque planum, quod basi portionis cuiuslibet prædictorum solidorum æquidistat, atque eius conuexam superficiem contingit, eam contingere ad verticem diametri recti Canonis; hoc est tangere ad verticem axis portionis solidæ.

Nam,

Nam, ad finem propositionis ostensum fuit, planum contingens portionem solidam EFG, & basi EHGI parallelum, eam contingere ad punctum F, quod est vertex diametri NF Canonis recti EFG, atque insuper idem punctum contactus F, iuxta Archim. definitiones præmissas ad librum de Conoid. &c. iam notum est verticem vocari axis portionis solidæ EFG.

SCHOLIVM III.

EX his itaque notandum est, axim solidæ portionis eundem esse cum diametro prædicti Canonis recti, & altitudinem, eandem cum altitudine.



Nam eadem recta FN, quæ ex constructione diameter est planæ portionis EFG, est quoque axis solidæ, cum ab F eius vertice, ad N centrum basis EHGI incedat. Præterea ducta ex harum portionum cõmuni vertice F recta FP ad basim EG planæ portionis, seu recti Canonis EFG perpendiculari. Patet hanc esse Canonis altitudinem, sed Canon EFG rectus ponitur ad basim EHGI; quare FP, quæ ad communem horum planorum sectionem EG est perpendicularis, recta erit ad planum basis EHGI, ac propterea ipsa erit quoque altitudo portionis solidæ EFG, cum perpendiculariter cadat ex eius vertice F super basim EHGI, &c.

COROLL. III.

PAtet denique axim portionis cuiuscunque prædictorum solidorum, & axim solidi, cuius est portio, esse in vno eodemque plano, quod per axem eiusdem solidi ad basim portionis rectum ducitur, siue esse in plano Canonis recti.

Etenim, & BD axis dati solidi, & FN axis solidæ portionis EFG sunt in plano EBC ducto per axem BD, sed erecto super basim EIGH portionis solidę EFG, quod planum EBC idem est, ac planum recti Canonis EFG intra solidam portionem intercepti.

Si ergo per axim datæ solidæ portionis, & per axim solidi, cuius est portio ducatur planum, hoc erit ad planum basis portionis erectum, atque in solida portione rectum Canonem exhibebit.

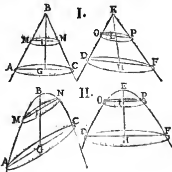
THEOR. XLIII. PROP. LXX.

Portiones eiuſdem, vel diuerſorum Conorum, aut Conoidum Parabolicorum, ſunt ſolida Acuminata proportionalia. Item.

Portiones eiuſdem, vel diuerſorum Conoidum Hyperbolicorum, vel Sphærarum, aut Sphæroidum, quarum ſegmenta diametrorum in portionibus genitricium earum ſectionum ad baſes erectis intercepta, ad ſuas ſemi- diametros eandem homologam habeant rationem, ſunt pariter ſolida Acuminata proportionalia.

SInt primò duæ quæcunque portiones A B C, D E F eiuſdem, vel diuerſorum Conorum, vt in prima figura, vel eiuſdem, aut diuerſorum Conoidum Parabolicorum, vt in ſecunda, quarum axes ſint B G, E H, baſes verò circuli, aut Ellipſes A C, D F, ipſæque portiones ſolidæ, (quæ iam per primum Scholium præcedentis ſunt ſolida Acuminata) planis per eorum ſolidorum axes ductis ad baſes rectis a ſecentur, & fient b in ſolidis recti Canones A B C, D E F, qui erunt c portiones ſectionum ſolida genitricium, & communes ſectiones ipſorum cum baſibus erunt d rectæ A C, D F, quæ circulorum, aut Ellipſium e erunt axes. Dico in vtraque figura ſolidas portiones A B C, D E F eſſe Acuminata ſolida proportionalia.

a 69. h.
b ibid. 1. Schol.
c ex 12. Archim. de Conoid. & Comand. ſuppleta.
d 3. vnd. Elem.
e ex 13. Archim. ibidem.



Etenim horum Acuminatorum ſolidorum axibus B G, E H proportionaliter vtcunque ſectis in I, L, ducantur per I, L plana M N, O P baſibus A C, D F æquidiſtantia, quæ in ſolidis efficient ſectiones ipſarum baſibus ſimiles f earumq; communes ſectiones cum planis A B C, D E F g erunt rectæ M N, O P ipſis A C, D F h parallelæ, & earundem ſimilium ſectionum homologæ diametri.

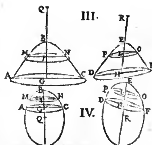
f ex Coroll. 15 ib.
g 3. vnd. Elem.
h 16. ib.

Iam cum ſit G B ad B I, vt H E ad E L, ob conſtructionem, ſitque in prima figura A C ad M N, vt G B ad B I; & D F ad O P, vt H E ad E L (cum Canones A B C, D E F ſint triangula) erit A C ad M N vt D F ad O P, & quadratum A C ad M N, vt quadratum D F ad O P. In ſecunda verò eſt quadratum A C ad M N, vt recta G B ad B I (cum Canon A B C ſit portio Parabolæ) vel vt recta H E ad E L, per conſtructionem, vel vt quadratum D E ad O P: eſt ergo in vtraque figura, vt quadratum A C ad M N, vel vt circulus, i aut Ellipſis

i Coroll. 7. Arch. ibid.

A C ad

A C ad ſibi ſimilem M N, ita quadratum D F ad O P, vel ita circulus, aut Ellipſis D F ad ſibi ſimilem O P, & permutando, ſectio A C ad D F erit vt ſectio M N ad O P, & hoc ſemper vbicunque ſolidorum Acuminatorum axes ſint proportionaliter ſecti: quare, ex tertia præmiſſarum definitionum, Acuminata ſolida A B C, D E F erunt ſolida Acuminata proportionalia. Quod erat primò, &c.



PRæterea ſint A B C, D E F duæ portiones eiuſdem, vel diuerſorum Conoidum Hyperbolicorum, vt in tertia figura, vel eiuſdem, aut diuerſorum Sphæroidum, vel Sphærarum, vt in quarta, (quæ portiones ſunt pariter ſolida Acuminata per 1. Schol. 69. h.) quarum baſes ſint circuli, aut Ellipſes A C, D F. Patet quod ſi per axes ſolidorũ, quorum ſunt portiones ducantur plana, [a] quæ portionum baſibus ſint erecta, fient in ſolidis portiones genitricium [b] ſectionum A B C, D E F, hoc eſt in tertia portiones Hyperbolarum, & in quarta portiones Ellipſium, quas vocamus [c] Canones, & communes horum Canonum ſectiones cum baſibus erunt [d] rectæ A C, D F, quæ ipſarum baſium erunt [e] axes. Sint iam Canonum A B C, D E F intercepta diametrorum ſegmenta B G, E H, (quæ & ſolidarum portionum axes vocantur ab Archimede) quibus productis vſque ad earum centra Q, R, habeat ſegmentum G B ad ſemi-diametrum B Q, eandem rationem, ac ſegmentum H E ad ſemi-diametrum E R. Dico in vtraque harum figurarum, portiones ſolidas, vel ſolida Acuminata A B C, D E F eſſe Acuminata ſolida proportionalia.

[a] 69. h.
[b] ex 12. Arch. de Conoid.
[c] 1. Schol. 69. h.
[d] 3. vnd. Elem.
[e] ex 14. & 15. Archim. ib.

Diuiſis enim ipſorum axibus B G, E H proportionaliter vtcunque in I, L, ductiſque per I, L planis M N, O P ipſis baſibus A C, D F æquidiſtantibus, erit ſectio M N in ſolido A B C ſimilis [f] baſi A C, & ſectio O P in ſolido D E F ſimilis baſi D F, & earum communes ſectiones cum planis Acuminatis A B C, D E F erunt rectæ M N, O P ipſis A C, D F parallelæ [g] vtraque vtrique, eruntque homologæ diametri earundem ſimilium ſectionum.

[f] ex Coroll. 15. eiuſdem.
[g] 3. & 16. vnd. El.

Et quoniam, per conſtructionem, in Acuminatis planis A B C, D E F, Hyperbolarum, vt in tertia figura, aut Ellipſium, vt in quarta, ſegmenta diametrorum G B, E H ad proprias ſemi-diametros B Q, E R eandem habent rationem, erunt [h] ipſa Acuminata, plana Acuminata proportionalia; ſuntque B G, E H proportionaliter ſectæ in I, L, ex conſtructione, quare vt recta A C ad D F, ita recta M N ad O P (ex definitione planorum Acuminatorum proportionalium) & quadratum A C ad D F, hoc eſt circulus, vel [i] Ellipſis A C ad ſibi ſimilem D F, vt quadratum M N ad O P, vel vt circulus, aut Ellipſis M N ad ſibi ſimilem O P, & hoc ſemper vbicunque

[h] 36. h.
[i] ex coroll. ſept. Arch. de Conoid.

axes BG, EH solidarum portionum sint proportionaliter secti: quare, ex definitione, ipsæ solidæ portiones ABC, DEF erunt solida Acuminata proportionalia. Quod vltimò demonstrandum erat.

COROLL.

Hinc manifestum fit solidas portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, quarum recti Canones sint æquales, inter se esse Acuminata solida proportionalia.

Nam quò ad portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, iam in prima parte huius propositionis ostensum est eas omnes, quæcunque sint, esse solida Acuminata proportionalia, ac ideò, & illæ quarum recti Canones sint æquales, erunt pariter solida Acuminata proportionalia.

Quò autem ad solidas portiones eiusdem Conoidis Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati; quandò earum portiones genitricium sectionum ad plana basium rectæ (quæ eædem sunt, ac recti Canones) fuerint æquales, patet ex prop. 63. huius, segmenta diametrorum ipsarum ad proprias semi-diametros, vnam, eandemque simul rationem habere, ac propterea ex ijs, quæ in hac vltimò loco demonstrauimus, huiusmodi solidæ portiones erunt Acuminata solida proportionalia.

THEOR. XLIV. PROP. LXXI.

Cylindrici æqualium altitudinum, inter se sunt vt bases.

Sint duo Cylindrici A, B, quorum bases sint plana Acuminata CDE, FGH, altitudines verò, sint æquales cuidam rectæ I. Dico Cylindricum A ad Cylindricum B, esse vt basis CDE ad basim FGH.

Concipiatur alius quicunque Cylindricus L, cuius basis sit parallelogrammum KT, altitudo verò sit eadem I: quod erit parallepipedum. Ostendam priùs Cylindricum A ad parallelepipedum, vel Cylindricum L esse vt basis CDE ad basim KT.

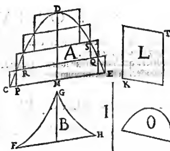
Nam si non est ita, erit basis CDE, vel maior, vel minor quàm sit opus, ad hoc vt ad basim KT habeat eandem rationem, ac Cylindricus A ad L. Esto primùm maior, sitque excessus O. Et cum Acuminatum CDE sit figura circa diametrum DM ad partem D deficiens, & cuius perimeter est ad eandem partem cauus, poterit, vsitata methodo, per continuam diametri DM bisectionem, inscribi Acuminato CDE figura ex parallelogrammis, ita vt ipsum Acuminatum superet inscriptam minori excessu, quàm sit O; sit ergo hæc inscripta PQ, RS, &c. Itaque cum Acuminatum CDE superet inscriptam PQ, RS, &c. minori quantitate O, erit inscripta adhuc maior, quam opus est ad hoc, vt ad basim KT sit vt Cylindricus A ad Cylindricum L.

Iam intra Cylindricum A super omnia inscriptæ figuræ parallelogram-

ma PQ, RS, &c, concipiantur descripta solida parallelepipeda æqualium altitudinum cum Cylindrico A, vel L; & quorum insistentes lineæ sint æquidistantes insistentibus Cylindrici A, &c. erit ergo vnumquodque parallelepipedorum inscriptorum, ad parallelepipedum L, [a] vt propria basis ad basim, ac ideò omnia simul inscripta super PQ, RS, &c. ad vnicum parallelepipedum, vel Cylindricum L, erunt vt omnes bases PQ, RS, &c. hoc est vt figura inscripta ad basim RT; sed inscripta ad KT maiorem habet rationem quàm Cylindricus A ad L, ergo, & omnia simul parallelepipeda inscripta, ad Cylindricum L maiorem habebunt rationem, quàm Cylindricus A circumscriptus ad eundem Cylindricum L, ergo inscripta simul parallelepipeda maiora erunt Cylindrico A, pars suo toto, quod est absurdũ: non est ergo basis CDE maior quàm opus est ad hoc vt ad basim KT sit vt Cylindricus A ad L.

[a] 32. vnd. Elem.

Si verò ponatur basim CDE ad KT habere minorem rationem quàm Cylindricus A ad L, erit basis CDE minor quàm opus est ad hoc vt huiusmodi magnitudines sint proportionales, inuento igitur defectu, &c. & facta basi CDE circumscriptione figuræ ex parallelogrammis, &c. quæ ad basim KT adhuc minorẽ habeat rationem quàm Cylindricus A ad L, & circumscriptis parallelepipedis vt supra, ostendetur aggregatum circumscriptorum parallelepipedorum ad Cylindricum L esse vt figura circumscripta ab basim KT, hoc est habere minorem rationem quàm Cylindricus A ad eundem Cylindricum L, ideoque prædictum aggregatum parallelepipedorum minùs esse Cylindrico A, totum sua parte, quod est absurdum. Non ergo basis C ad KT habet maiorem, nec minorem rationem quàm Cylindricus A ad L, ergo erit basis CDE ad basim KT, vt Cylindricus A ad L. Eadem ratione demonstrabitur, basim KT ad Acuminatum FGH, siue ad basim Cylindrici B, esse vt Cylindricus L ad Cylindricum B; quare, ex æquo, erit vt basis CDE ad basim FGH, ita Cylindricus A ad Cylindricum B. Quod erat, &c.



COROLL.

PErspicuum hinc est, quod si huiusmodi Cylindrici æqualiũ altitudinum æquales bases habuerint inter se æquales erunt.

THEO-

THEOR. XLV. PROP. LXXII.

Si Cylindricus plano ſecetur baſi æquidiſtante, erit Cylindricus ad Cylindricum, vt altitudo ad altitudinem.

HOc eadem penitus conſtructione, ijſdemque argumentis demonſtrabitur, ac 13. duodecimi Elem. ope tamen præcedentis Corollarij; animaduertendo ſimul, quod dum Cylindricus plano ſecatur baſi æquidiſtante, in ipſa ſectione oritur figura ſimilis, & æqualis, ſiue in totum congruens baſi Cylindrici: nam ipſæ Cylindricus, ex motu parallelo ſuæ baſis procreari concipitur, ex definitione, &c.

SCHOLIVM.

EX hac pendet huius concluſionis demonſtratio, quod eſt conuerſum prop. 71. huius; nempe.

Cylindrici æqualium baſium ſunt inter ſe, vt altitudines; quod oſtenditur vt in 14. duodecimi Elementorum.

THEOR. XLVI. PROP. LXXIII.

Cylindrici, quorum baſes altitudinibus reciprocantur, inter ſe ſunt æquales: & è conuerſo.

HVius Theorematis demonſtratio elicitur ex præcedenti, eſtque omninò ſimilis 15. duodec. Element. itaque breuitatis gratia, hanc ipſam o mittimus, ſimulque nonnullas alias Cylindricorum affectiones, cum hic de ijs differere non ſit opus.

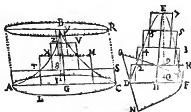
THEOR. XLVII. PROP. LXXIV.

Solida Acuminata proportionalia, quorum baſes altitudin ibus ſint reciprocè proportionales inter ſe ſunt æqualia.

SInt duo Acuminata ſolida proportionalia, quorum Canones A B C, D E F ſint ſuper baſes A C, D F, & circa diametros B G, E H; baſes verò horum ſolidorum ſint Acuminata plana A L C, N F O circa diametros A C, D F, ſitque vnius ſolidi altitudo B I, ad alterius altitudinem E Q reciprocè, vt baſis N F O ad baſim A L C. Dico huiuſmodi ſolida inter ſe æqualia eſſe.

Si enim

Si enim fuerint inæqualia, alterum ipsorum minus erit: sit ipsum A B C, quod cum sit ad partem B deficiens, patet ei circumscribi posse per continuam axis B G bisectionem, &c. figuram ex Cylindris æque-altis, quæ inscriptum solidum Acuminatum A B C superet minori excessu, quo solidum D E F dicitur excedere idem solidum Acuminatum A B C: (sufficit enim vt circumscripto Canoni A B C parallelogrammo A R, eius ope, tanquam circa diametralem Canonem, ad æquidistantem motum basis A L C describatur Cylindricus A R, vt vides, circumscribens Acuminatum solidum A B C, sic enim plano per punctum medium axis B G applicato, bifariam [a] secabitur Cylindricus, quod si iterum axis dimidium bifariam secetur, &c. relinquetur tandem Cylindricus A S, qui prædicto excessu minor erit: vnde hac vltima diametri B G diuisione per æqualia segmenta, completa circumscriptione Cylindricorum T M, X V, Z Y æqualium altitudinum, quorum diametrales Canones sint A S; T M; X V; X Y; aggregatum ipsorum excedet solidum A B C minori quantitate, quàm sit primus Cylindricus A S, cum A S sit semper excessus circumscriptæ figuræ ex Cylindricis super inscriptam ex æque - altis Cylindricis, &c. sed Cylindricus A S ponitur minor excessu solidi D E F super A B C, ergo circumscripta figura A S M Y ex Cylindricis, superat inscriptum solidum A B C minori excessu ipsius solidi D E F supra A B C) sit ergo quæsita figura circumscripta, ex Cylindricis A S, T M, X V, Z Y, &c. quæ ideò adhuc minor erit solido D E F, cui eadem arte circumscribatur figura ex totidem æque - altis Cylindricis D K; 2 3; 4 5; 6 7; quorum maximi, diametralis Canon sit D K super basim O F N; proximi verò diametralis Canon sit 2 3, &c. *a 72. h.*



Iam patet horum solidorum altitudines B I, & Q in tot æquas partes secari à parallelis basibus circumscriptorum Cylindricorum, in quot [b] secatur diametri B G, E H, Canonum A B C, D E F. Sit igitur primi Cylindrici A S altitudo 8 I, & primi D K altitudo 9 Q: & cum sit basis A L C, ad basim O F N, ita reciprocè altitudo E Q ad altitudinem B I, sumptis consequentium æque - submultiplicibus 9 Q, 8 I; erit basis A L C, ad O F N, vt altitudo 9 Q, ad 8 I; quare Cylindricus A S æqualis erit [c] Cylindrico D K. Eadem ratione demonstrabuntur reliqui Cylindrici T M, X V, Z Y, reliquis 2 3, 4 5, 6 7, æquales esse, singuli singulis, quapropter vniuersa figura ex Cylindricis, circumscripta solido A B C, æqualis erit vniuersæ circumscriptæ solido D E F, sed circumscripta ipsi A B C demonstrata est minor solido D E F, ergo, & circumscripta solido D E F, ipso sibi inscripto solido minor erit, totum sua parte, quod est absurdum. Non est ergo vllum horum Acuminatorum *b 17. vnd. Elem.* *c 73. h.*

rum

rum altero maius: quare omnino inter se sunt æqualia. Quod erat demonstrandum.

MONITVM.

Non paucas alias solidorum Acuminatorum, eorumque truncorum proprietates (quales nimirum attigimus de planis, & mensalibus Acuminatis in Scholio propos. 37. huius) facilè huc esset, si locus requireret, ex superioribus afferre: verùm ad opportuniorem occasionem hæc omnia, aliaque fusius forsan pertractabimus, si Deo nobis valetudinem cum vita, vel saltem mitiorem ægritudinem præstare placuerit. Modò ad inuentionem MAXIMARVM, MINIMARVMQVE solidarum portionum accedamus, nonnullis adhuc praostensis.

LEMMA XIV. PROP. LXXV.

Datæ portioni anguli rectilinei, circa diuersam diametrum datam, æqualem portionem constituere.

ESto ex angulo rectilineo abscissa portio ABC, cuius basis AC, diameter verò BD; sitque data alia diameter BE, circa quam oporteat portionem ipsi ABC æqualem constituere.

Latus AB secetur bifariam in F, & per F agatur FG parallela ad BC cum BE occurrens in G, per G verò ducatur AGH ipsam BC secans in H, atque inter CB, BH sumatur media proportionalis BI agaturque per I recta IL basim AC secans in M, & datam diametrum BE in N, & BA productam, in L. Dico ipsam IL abscindere LBI portionem quæsitam.

Triangulum enim ABC ad triangulum ABH est vt basis CB ad BH, vel vt quadratum mediæ proportionalis IB ad quadratum tertiæ BH, vel vt triangulum LBI ad idem triangulum ABH: (ob similitudinem) quare triangula ABC, LBI sunt æqualia.

Et cum rectæ LI, AH simul æquidistent, secenturque ab eadem BN ex vertice B trianguli LBI ducta, erit LN ad NI, vt AG ad GH, vel vt AF ad FB (ob parallelas FG, BH) sed est AF ipsi FB æqualis (per constructionem) ergo, & LN ipsi NI æqualis erit. Itaque ad datam diametrum BN, in angulo ABC ordinatim applicata est LI abscindens triangulum, vel portionem LBI alteri datæ portioni ABC æqualem. Quod faciendum erat.

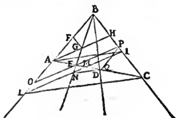
SCHO-

SCHOLIVM.

His peractis, patet bases A C, I L æqualium portionum de eodem angulo A B C necessariò se mutuò secare intra angulum. Nam I M, quæ ex puncto I inter H, & C sumpto æquidistans ducitur rectæ A H necessariò occurrit cum A C, vt in M.

Dico ampliùs earum basium occursum M cadere omninò inter diametros B D, B E; hoc est inter puncta E, D; atque rectas N D, A I, L C harũ basim tùm puncta media, tùm extrema iungẽtes esse inter se parallelas.

Si enim per E agatur O E P ipsis A H, L I æquidistans, & per P recta P Q parallela ad A B, erit (ob ipsarum æquidistantiam) O E æqualis E P, itemque A E çqualis E Q (ob triangulorum similitudinem A E O, Q E P) atque anguli ad E sunt æquales, quare & ipsa triangula çqualia erunt, quibus communi addito trapetio A B P E, fiet triangulum O B P æquale mensali A B P Q, hoc est minus triangulo A B C, vel triangulo L B I, quare L I est infra æquidistantem basim O P, siue basis L I secat basim A C vltra E, versus D. Præterea cum sit C B ad B I, a vt C I ad I H, vel vt C M ad ad M A, sitque C B maior B I erit C M maior M A, hoc est punctum M cadet vltra D, versus E. Itaque harum basium occursus est inter diametros B N, B D. Quod idem est, ac si dicatur nullam ipsarum basium transire per medium punctum alterius.

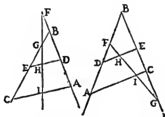


a Coroll. 12. primi huius.

Tandem cum triangula A B C, L B I sint æqualia, dempto communi triangulo A B I, remanebit triangulum A C I çquale triangulo A L I, suntque super eadem basi A I, quare A I ipsi L C æquidistabit; & cum inter parallelas A I, L C interceptæ sint duæ C A, L I proportionaliter sectæ in N, D, (ibi enim bifariam sectæ sunt ex hypothesi) erit quoque iuncta N D ipsi L C, vel A I æquidistans; vt patet ex Elementis.

LEMMA XV. PROP. LXXVI.

Si in angulo ABC applicatæ fuerint quotcunque rectæ lineæ AC, DE, &c. inter se parallelæ; quæ a quacunque alia recta FG vtrique lateri dati anguli occurrente in F, G, secentur in H, I, &c. Dico vt rectangulum FHG ad DHE, ita esse rectangulum FIG, ad AIC.



Etenim ratio rectanguli FHG ad DHE, componitur ex ratione FH ad HD, siue ex FI ad IA; & ex ratione GH ad HE, siue ex GI ad IC; sed & ratio rectanguli FIG ad AIC ex iisdem rationibus componitur, quapropter rectangulum FHG ad DHE, est vt rectangulum FIG ad AIC. Quod erat, &c. Et permutando, rectangulum FHG ad FIG, vt rectangulum DHE ad AIC.

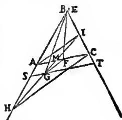
THEOR. XLVIII. PROP. LXXVII.

Si fuerint duæ æquales portiones de eodem angulo, vel de eadem coni-sectione, vel circulo, & ex puncto medio basis vnius portionis applicata sit in angulo, vel sectione quædam recta linea basi alterius portionis æquidistans: rectangulum sub segmentis huius applicatæ æquabitur quadrato semi-basis eiusdem portionis, cui hæc ipsa applicata æquidistanter ducta fuit.

Sint de eodem angulo, vt in præsenti figura, vel de quacunque coni-sectione, vt in figuris tertij Schematismi, abscissæ duæ æquales portiones ABC, HEI (vti docuimus in præcedenti, atque ex quadragesima huius absolui posse elicitur) quarum diametri sint BF, EG bases verò sint AC, HI ab ipsis diametris bifariam sectæ in F, G. Iam [a] patet has bases omninò se mutuò secare, atque inter portionum diametros vt in M, siue, punctum earum occursus M differre à punctis medijs F, G. Itaque si per alterum ipsorum, vtputa per G puncto medio basis HI, applicetur in angulo, vel sectione recta SGT parallela alteri basi AC, hæc omnino ad vtranque partem cum anguli lateribus, vel cum sectione conueniet, cum ipsa sit vna applicatarum ad diametrum BF. Occurrat ergo in S, T: Dico rectangulum SGT quadrato dimidiæ basis AC, siue quadrato FC æquale esse.

[a] Schol. 75. h. & per 1. Coroll. 40. h.

Iun-



Iunctis enim rectis A I, G F, H C: patet has inter se *a* æquidistare, ac ideò ipsas proportionaliter diuidere rectas H G M I, C F M A inter eas interceptas in punctis G, F, M. Erit ergo, in singulis figuris, quadratum H G ad quadratum G M, vt quadratum C F ad quadratum F M, & permutando quadratum H G ad quadratum C F, vt quadratum G M ad F M: sed, in præsenti figura, est quadratum H G æquale rectangulo H M I vnà cum quadrato G M, & quadratum C F æquatur rectangulo C M A vnà cum quadrato F M, (cum rectæ H I, A C bifariam sectæ sint in G & F, & non bifariam in M) atque est totum quadratum H G ad totum C F vt pars ad partem, vel vt quadratum G M ad F M, ergo reliquum ad reliquum, nempe rectangulum H M I ad C M A, vel *b* rectangulum H G I ad T G S erit vt totum ad totum, siue vt quadratum H G ad quadratum C F, sed antecedentia sunt æqualia, hoc est rectangulum H G I, & quadratum H G, cum sit recta H G æqualis G I, ergo, & consequentia æqualia erunt, nempe rectangulum T G S, & quadratum C F. Quod in anguli portionibus demonstrandum erat.

a ibidem.

b 76. h.

In reliquis autem figuris iam dicti tertij Schematismi, est rectangulum H G I ad rectangulum T G S, vt quadratum *c* contingentis E N ipsi H I parallelæ ad quadratum contingentis B N alteri A C æquidistantis, vel vt quadratum G M ad M F (nam ibi primo loco ostensum fuit in singulis esse E N ad N B, vt G M ad M F) vel ob parallelas A I, F G, C H, vt quadratum H G ad quadratum C F, atque antecedentia sunt æqualia, nempe rectangulum H G I quadrato H G, cum recta H G sit æqualis rectæ G I, ergo, & consequentia, siue rectangulum T G S quadrato C F æquale erit, Quod omnino ostendere propositum fuit.

c 17. tertij Conic.

MONITVM.



VM ad abscindendas MAXIMAS, & MINIMAS coni-sectionum portiones per punctum in ijs datum, animaduertissemus olim præmittendam esse inuestigationem æqualium portionum eiusdem coni-sectionis, quas deinde pro quacunque coni-sectione reperimus, atque vnica demonstratione confirmauimus, (vt visum est in 40. huius, ac simul vt in 45. eas omnes proprijs basibus similem, & concentricam eiusdem nominis sectionem contingere) ita dum MAXIMAS, ac MINIMAS Conorum, aut Conoidalium, vel Sphæroidalium solidorum portiones nobis duximus inquirendum, necesse fuit prius contemplari, quæ nam eiusdem Coni recti,

vel Conoidis, ſiue Sphæræ, aut Sphæroidis portiones inter ſe æquales eſſent: vnde mox venit nobis in animum perpendendi, an illæ inter ſe æqualitatem ſortirentur, quarum portiones planæ genitricium ſectionum ad plana baſium erectæ, nempe quarum recti Canones inter ſe pariter æquales eſſent, prout æquales inſpexeramus in Conoide Parabolico, ex 25. Archimedis in libro de Conoid. & Sphæroid. Res quidem ex cogitatione ſucceſſit, tunc enim in ſequentem vniuerſalem demonſtrationem incidimus, cuius, atque ſuperioris quadrageſimæ propoſitionis, ſolæ enunciationes, cum præſtantiſſimis Geometris, Galileo, ac Torricellio communicatæ, tantos Viros, meruerunt habere laudatores.

THEOR. IL. PROP. LXXVIII.

Solidæ portiones eiuſdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, ſiue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, quarum recti Canones ſint æquales, inter ſe quoq; æquales ſunt.

ESto Coni recti, vt in prima figura, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, ſiue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, vt in ſecunda, quorum axis BD, quælibet ſectio per axem ABC, quæ erit [a] genitrix dati ſolidi, à qua demantur duæ æquales portiones planæ ABC, EFG (hoc autem fieri poſſe manifeſtum iam [b] eſt) quarum baſes ſint AC, EG bifariam ſectæ in H, I, & ipſarum altera AC ſit axi perpendicularis, altera verò vtcunque inclinata; & per eas concipiantur duci plana ALC, EMG ad planum per axem ABC erecta, auferentia portiones ſolidas ABC, EFG, quarum recti Canones erunt ipſæ portiones planæ ABC, EFG: patet ſectionem ALC circulum eſſe, [c] cuius diameter AC, centrum H, atque EMG eſſe Ellipſim, cuius axis maior, in Cono, vel in Conoide Parabolico, aut Hyperbolico, atque in Sphæroide oblongo, erit ipſa baſis EG, ſed in prolato erit [d] minor axis, vbique autem centrum I. Dico huiuſmodi ſolidas portiones ABC, EFG inter ſe æquales eſſe.

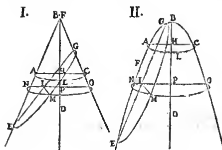
Secetur iterum datum ſolidum ABC, plano per punctum I tranſeunte, & ad axem BD erecto, ſiue plano ALC æquidiſtanti, quod in ſolido efficiet [e] pariter circulum NMO, cuius centrum P in axe, & diameter NO, quæ ipſi AC [f] æquidiſtabit, communis autem ſectio recti plani NMO, cum alio plano EMG, erit [g] recta MI, quæ quidem recta erit [h] ad planum per axem ABC (cum ea ſit communis ſectio duorum planorum ad idem planum per axem erectorum) ideoque tùm ad circuli diametrum NO, tum ad EG axem Ellipſis, erit perpendicularis, & in Cono, aut Conoide, vel Sphæroide oblongo erit ſemi-axis minor, in prolato verò ſemi-axis maior. Et quoniam MI ad diametrum NO ſemi-circuli NMO eſt perpendicularis, erit quadratum MI æquale rectangulo NIO, ſed & quadratum

[a] 12. Archim. de Conoid.
[b] ex 40. & ex 75. h.
[c] ex 1. primi huius, & ex 12. 13. 14. 15. Archim. de Conoid. &c.
[d] ibidem.
[e] 12. ibid.
[f] 16. Vnd. Elem.
[g] 3. ibid.
[h] 19. ibid.

dratum

dratum AH eidem rectangulo NIO est æquale, cum sit NIO [a] parallela ad AC, & per I punctum medium basis EG ducta, &c. ergo, & quadratum MI ipsi AH, seu linea MI lineæ AH æqualis erit, sed Ellipsis EMG ad circulum ALC est vt [b] rectangulum sub GI, & IM ad quadratum ex AH, vel vt linea GI ad AH (ob communem altitudinem MI) vel sumptis duplis, vt EG ad AC, ergo basis portionis solidę EFG, ad basim portionis solidę ABC, est vt EG basis Canonis EFG, ad AC basim Canonis ABC; verùm vt EG ad AC, ita [c] est reciprocè altitudo Canonis

[a] 77. h.
[b] ex 6. Archim. de Conoid.
[c] 65. h.



ABC ad altitudinem Canonis EFG (cum ipsi Canones ęquales facti sint) atque Canonum altitudines eædem sunt [d] cum altitudinibus solidarum portionum, vnde basis EMG ad basim ALC erit reciprocè, vt altitudo solidæ portionis ABC ad altitudinem solidæ EFG: hæ autem portiones sunt solida [e] Acuminata proportionalia, eò quod ipsarum Canones sint æquales, atque bases altitudinibus sunt reciprocæ, ergo huiusmodi portiones solidæ ABC, EFG sunt [f] æquales. Quod demonstrandum erat.

[d] 3. Schol. 69. h.
[e] Coroll. 70. h.
[f] 74. h.

Sed hoc idem, tribus proximè præcedentibus propositionibus omissis, super nouo diagrammate sic ostendere conabimur

ALITER.

Sit Conus rectus, vt in prima figura, vel aliud quodcunque prædictorum solidorum, vt in secunda, circa axim AB, & sectio per axim sit EAD, quæ genitrix erit [g] dati solidi, à qua demptæ sint duæ quælibet portiones planæ æquales CAD, EAF, quarum bases sint CD, EF, & per ipsas ducantur plana secantia data solida, & ad ipsum planum per axem EAD erecta, circulos, vel [h] Ellipses EOF, CPD descr ibentia (quarum maiores axes in Cono, Conoide Parabolico, Hyperbolico, & Sphæroide oblongo

[g] ex 12. Archim. de Conoid. &c.
[h] ex prima primi huius, & ex 13. 14. 15. Arch. de Conoid. &c.

a ibidem. longo erunt a ipſę C D, E F, in prolato verò erunt axes minores) auferentiaque ſolidas portiones C A D, E A F, quarum recti Canones erunt ipſæ æquales portiones planæ C A D, E A F. Dico tales portiones ſolidas inter ſe æquales eſſe.

Nam bifariam ſectis E F in G, & C D in H, patet puncta G, H eſſe centra circulorum, ſiue Ellipſium E O F, C P D; & ſi per punctum G deſcribatur b in vtraque figura eiuſdem nominis Coni-ſectio G H, quę ſimilis ſit, & concentrica ſectioni E A D, & qualis in Monito poſt 68. h. definiuimus, patet inquam ipſam ſectionem G H omnino tranſire per H, ſimulque E F, & C D in punctis medijs G, H c contingere.

b 4. ſec. Conic & 5. 6. 7 primi huius.

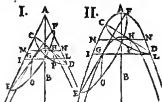
c 68. h.

Iam ductis per G, H, rectis I G L, M H N ad axem A B perpendicularibus, concipiantur per ipſas duci plana ad planum per axem E A D erecta, quæ efficient in exteriori ſolido circulos d circa diametros I L, M N, & communes eorum ſectiones cum planis per E F, C D ductis, erunt e rectæ G O, H P, quæ ad planum E A D rectæ erunt f (ſunt enim communes ſectiones duorum planorum ad idem planum erectorum) hoc eſt, tùm O G cum vtriſque E F, I L, tùm P H cum vtriſque C D, M N rectos efficiet angulos; vnde in circulis tranſeuntibus per I L, M N, rectangulum I G L æquabitur quadrato G O, & rectangulum M H N quadrato H P, atque ipſæ G O, H P erunt circulorum, aut Ellipſium E O F, C P D minores ſemi-axes, in Cono tamen, vel Conoide Parabolico, aut Hyperbolico, vel in Sphæroide oblongo; nam in prolato, erunt maiores ſemi-axes: ſed rectangula I G L, M H N ſunt g æqualia, vtrunque enim æquatur quadrato ſemi-tangentis per verticem interioris ſectionis, &c. ergo, & quadrato G O, H P æqualia erunt, ſiue ſemi-axis G O æqualis ſemi-axi H P; ſed circulus, aut Ellipſis E O F ad C P D, eſt vt h rectangulum ſub E F, G O, ad rectangulum ſub C D, H P, & rectangulum ſub E F, G O ad rectangulum ſub C D, H P eſt vt E F ad C D (cum eorum latitudines G O, H P ſint æquales) ergo circulus, vel Ellipſis E O F ad C P D erit in ſolido Parabolico, vel Hyperbolico, aut Sphæroide oblongo, vt maior axis E F ad maiorem axim C D, vel in Sphæroide prolato, vt minor axis E F ad minorem C D: ſed E F ad C D eſt i vt altitudo Canonis C A D, ad altitudinem Canonis E A F, cum ipſi ſint æquales portiones eiuſdem coni-ſectionis, & horum Canonum altitudines ſunt l eædem, ac altitudines ſolidarum portionum C A D, E A F, quare circulus, vel Ellipſis E O F ad C P D, erit reciprocè vt altitudo ſolidæ portionis C A D, ad altitudinem ſolidæ E A F: at huiuſmodi portiones ſunt m ſolida Acuminata proportionalia, & ipſorum baſes altitudinibus reciprocantur, ergo ipſæ ſolidæ portiones inter ſe ſunt n æquales. Quod erat demonſtrandum.

d 4. primi Conic. & 12. Arch. de Conoid. &c.

e 3. vnd. Elem.

f 19. ibid.



g 3. Coroll. 46. h.

h 7. Arch. de Conoid. &c.

i 65. h.

l 3. Schol. 69. h.

m Coroll. 70. h.

n 74. h.

CO-

COROLL. I.

Hinc colligitur, quod puncta media rectarum quarumlibet applicatarum in sectione per axem ducta, cuiuscunque prædictorum solidorũ, sunt centra basium earum portionum solidarum à planis per easdem rectas ductis, atque ad eandem sectionem per axem erectis abscissarum.

Nam puncta media G, H, applicatarum E F, C D demonstrata sunt esse centra prædictarum basium EOF, CPD, &c.

COROLL. II.

PErspicuum est quoque, bases solidarum portionum inter se æqualium eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, habere inter se axes minores æquales, siue esse æqualium latitudinum, ac ideò esse inter se, vt axes maiores, vel vt bases rectorum Canonum. Bases verò æqualium portionum eiusdem Sphæroidis prolati habere maiores axes æquales, ac propterea esse inter se vt axes minores, vel vt bases eorundem rectorum Canonum.

Etenim, in præcedentibus figuris, de basibus EOF, CPD (vel sint Circuli, vel Ellipses) portionum solidarum EAF, CAD, quas æquales esse demonstrauimus, ostensum priùs fuit semi-axes minores GO, HP in Cono recto, vel Conoide, aut Sphæroide oblongo esse æquales, ac ideò, & eorum duplos, hoc est integros minores axes æquales esse; & paulò post circulum, vel Ellipsim EOF ad CPD esse vt maior axis EF ad maiorem CD, vel vt basis recti Canonis EAF, ad basim recti Canonis CAD. In Sphæroide autem prolato demonstratum est ipsas GO, HP maiores semiaxes, item æquales esse, siue integros maiores axes æquales, & postea circulos, vel Ellipses EOF, CBD habere inter se eandem rationem, ac ipsi minores axes EF, CD; nimirum esse inter se, vt sunt bases rectorum Canonum EAF, CAD.

THEOR. L. PROP. LXXIX.

Solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel cuiuscunque Conoidis, vel Sphæræ, aut cuiuslibet Sphæroidis tunc æquales sunt, quando, in Cono, portionum axes pertingant ad idem Conoides Hyperbolicum concentricum, &c. In Conoide verò Parabolico, quando portionum axes sint æquales. At in Conoide Hyperbolico, Sphæra, aut quocunque Sphæroide, quando portionum axes, ad proprias semi-diametros ijsdem axibus in directum positas, sint in vna eademque ratione.

ETenim quandò in portionibus eiusdem cuiuscunque prædictorum solidorum diametri rectorum Canonum habuerint relatiuè conditiones

superiùs

superiùs allatas, ipsi Canones recti, qui iam sunt portiones, vel anguli, vel coni-sectionis, aut circuli, æquales iam sunt ostensi, vti de anguli portionibus patet ex prima parte 45. huius, pro reliquis autem Coni-sectionibus, &c. ex 40. sed dum huiusmodi Canones recti sunt æquales, & portiones solidæ demonstrantur æquales, ex superiori Theoremate, suntque rectorum Canonum diametri [a] eædem, ac axes solidarum, quare, & dum diametri rectorum Canonum, siue dum axes solidarum portionum respectiuè seruabunt, quod modò exposuimus, ipsæ portiones solidæ æquales erunt. Quod erat, &c.

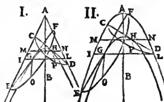
[a] 3. Schol. 69. h.

Itaque prop. 25. præcitati libri Archimedis, quæ solùm de portionibus Conoidis Parabolici differit, supposita etiam proportione Conoidis ad sibi inscriptum Conum, nobis hic est præsens Theorema, quod generaliter proponit ea, quæ ad cognitionem faciunt æqualium portionum, cuiuslibet simul prædictorum solidorum, atque ipsa diuersa ratiocinatione confirmat, nulla habita ratione proportionis, quæ cadit inter solidas portiones, & inscriptos Conos, aut circumscriptos Cylindros.

THEOR. LI. PROP. LXXX.

Omnes solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, siue Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati, quarum bases contingant eandem similis, & inscripti concentrici solidi superficiem, inter se sunt æquales, & ad centra basium eandem superficiem contingunt.

Repetito secundo Schemate præcedentis 78. ijsdemque positis, quæ ibi, si concipiantur figuræ conuerti circa axim A B, procreabitur denuò à sectione E A F datum solidum, & à sectione G H inscriptum simile solidum concentricum. Ampliùs si fuerint quotcunque rectæ E F, C D, &c. interiorem sectionem G H contingentes, per quas agantur plana E O F, C P D ad ipsas sectiones recta, hæc abscindent de exteriori solido portiones solidas E A F, C A D,



atque erunt earundem portionum bases, quæ concentrici solidi G H superficiem contingent [b] in ijsdem punctis G, H, in quibus rectæ E F, C D sectionem G H contingunt, quæ puncta, per iam demonstrata, sunt [c] centra ipsarum basium, sed huiusmodi portionum solidarum E A F, C A D, Canones

[b] 55. h.
[c] Coroll. 1. 78. h.

niones E A F, C A D (qui, ex constructione, sunt ad plana basium recti) sunt [a] æquales, ergo & ipsæ solidæ portiones æquales [b] erunt. Vnde omnes solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel cuiuslibet prædictorum solidorum, quarum bases contingant eiusdem similis, & concentrici solidi superficiem inter se sunt æquales, & ad centra basium eandem superficiem contingunt. Quod ostendere propositum fuerat; quodque Cl. Tor. inter proprios pugillares geometricos regerere non est dedignatus: animo, vt opinari libet, huiusce haud iniucundi Theorematis, à me ipsi tantummodo expositi demonstrationem inquirendi, quam postea solùm de Coni portionibus nactus fuit, vel potiùs circa ipsas tantùm placuit ei meditari: eminentissimi enim, ac propè diuini ingenij Vir, & de aliorum solidorum portionibus feliciùs quàm à nobis superiùs factum sit, hoc idem reperisset, si tantillùm excogitasset: verùm proprias, ac ideò sublimiores contemplationes affectans, ab his nugis meis fortasse se abstinuit. a 45. h. b 78. h.

SCHOLIVM.

HIc autem animaduertendum est, quod nihil refert vtrùm bases, huiusmodi portionum solidarum inscriptum solidum concentricum contingant ad puncta eiusdem sectionis solidum genitricis, vel diuersarum: nam omnes genitrices sectiones eiusdem solidi concentrici, se mutuò secant in eodem vertice axis reuolutionis prædicti solidi; sed omnes portiones solidæ exterioris, quæ quamlibet solidi interioris genitricem sectionem per centra earum basium contingunt, æquales ostendi possunt per superiorem prop. 78. eidem tertiæ portioni solidæ ab ipso exteriori solido abscissæ, ei nempe, cuius basis transiens per axis verticem ad eundem axim sit recta, circulum in sectione efficiens; ergo omnes prædictæ portiones solidæ, vbicunque earum bases contingant superficiem similis, & concentrici inscripti solidi, inter se æquales erunt, cum tertiæ euidam portioni sint æquales, &c.

THEOR. LII. PROP. LXXXI.

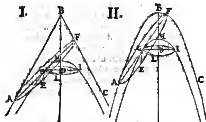
Si planum ductum per axem Coni recti, vel Conoidis Parabolici, aut Hyperbolici, Sphæræ, aut Sphæroidis oblongi, vel prolati à quadam recta linea secetur, per quam ductum sit planum, quod ad planum per axem rectum sit: solidi portio, quæ per hoc planum abscinditur, MINIMA est omnium portionum à quibuslibet alijs planis per eandem rectam ductis abscissarum.

ESto quodlibet prædictorum solidorum A B C, cuius axis reuolutionis sit B D, & planum per axem ductum sit A B C vbicunque sectum à quadam recta A F, ad vtranque partem sectioni occurrente, per quam concipiatur duci planum A E F ad ipsum A B C rectum, portionem ex solido

abſcindens A B F, cuius baſis ſit A E F, & Canon rectus A B F. Dico hanc ſolidam portionem *MINIMAM* eſſe earum, quæ à quocunque alio plano per eandem A F ducto ex dato ſolido abſcindi poſſunt.

Diuidatur A F bifariam in G, & per G in plano per axem A B C deſcribatur [a] in prima figura (exhibente Conum) Hyperbole G H I, cuius aſymptoti ſint B A, B C; in ſecunda verò (quodcunque aliorum ſolidorum repræſentante) deſcribatur [b] coni-ſectio G H I ſimilis, & concentrica ſectioni A B C, quæ in vtraque figura omnino continget rectam A F in G, (nam ſi alia eſſet contingens per G ſectionem G H I, ipſa producta ad vtranque partem exteriori ſectioni A B C occurreret, ac bifariam ſecaretur [c] in G: vnde duæ applicatę per G in ſectione A B C ſe mutuò bifariam ſecarent, quod eſſet contra 26. ſec. Conic., quæ vnicuique coni-ſectioni inſeruit, licet de ſola Ellipſi, vel Circulo agat, ſed hoc idem, & pro angulo ſimul, aliter patet, ex primo Coroll. 68. h.) & concipiatur circa communem axim B D H ſectio G H I in gyrum conuerſa: patet hanc deſcribere ſolidum G H I ſimile, & concentricum exteriori A B C; & cum recta A F contingat ſectionem G H I in G, & per A F ductum ſit planum A E F ipſi plano per axem G H I perpendiculare, hoc ipſum continget [d] concentrici ſolidi ſuperficiem in puncto G.

a 4. ſec. Conic.
b 5. 6. 7. primi h.
c Coroll. 45. h.
d 55. h.



Ponatur primò punctum G eſſe extra axis verticem H, & per G intelligatur duci planum G L I ad axem erectum, quod in ſolido G H I circulum efficiet [e] centrum habentem in axe, vt in D, & cuius communis ſectio cum plano per axem erit diameter G D I, cum alio autem plano A E F erit recta E G, quæ cum ſit communis ſectio duorum planorum ad planum A B C erectorum, erit ad idem planum [f] recta, ac ideo cum diametro G D I rectum conſtituet angulum E G I, ſiue ipſa E G in puncto tantùm G circulum continget.

e 4. primi Conic. & 12. Arch. de Conoid. &c.
f 19. vnd. Elem.

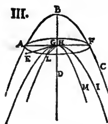
Iam intelligatur per A F aliud planum duci ad planum per axem A B C non erectum (ſed tale quod de exteriori ſolido aliam terminatam ſectionem abſcindat) cuius communis ſectio cum circuli plano diuerſa erit à linea G E (planum enim nunc ductum conuenit cum plano A E F per rectam tantùm A F.) Sit ipſa G L. Et quoniam G E rectos facit angulos cum G I, ipſa

G L

G L cum eadem G I haud rectos efficiet, vnde producta hinc inde ad alteram partem cadet intra circulum G L I, eius peripheriæ occurrens in L. Cum ergo G L sit tota intra circulum, circulus verò totus intra solidum, erit quoque G L tota intra solidum: quare planum, quod per A F, & G L ductum fuit, secabit omnino interius solidum G H I, de quo aliquam terminatam portionem abscindet (cum idem planum vndique productum de exteriori solido ponatur quoque portionem quandam auferre) cuius conuexa superficies tota erit intra portionem exterioris solidi ab eodem plano abscissam.

Si verò punctum G (quod nuper ostēsum fuit esse cōtactum plani per A F ducti, ad planum per axem A B C recti, cum interioris solidi G H I superficie) fuerit in ipso axis vertice H, vt in hac tertia figura, ostendetur etiam quodlibet aliud planum A L F per rectam A F ductum, sed ad planum per axem A B C inclinatum, quodque de exteriori solido aliquam portionem abscindat, omnino secare interius solidum, ideoque de ipso quandam portionem terminatam auferre.

Nam, in prædicto contingente plano A E F, ducta per G quacumq; recta G E cū G A quemlibet angulum constituente, & per rectam G E, ac per axim G D ducto alio plano, id in interiori solido describet genitricem [a] sectionem L G M, quam cōringet in G recta G E eorundem planorum communis sectio, cum hæc ponatur esse in plano contingente vniuersam solidi superficiem, sed planum inclinatum A L F vndiq; productum ad alteram partium, vtputa ad E, cadit infra contingens planum, cum eo commune habens tantum rectam A F, ergo & communis sectio ipsius plani inclinati cum sectione L G M, nempe recta G L cadet infra idem planum contingens, ac ideo infra rectam G E; sed G L, & G E sunt in plano L G M, atque G E ipsam sectionem contingit, vt modò ostendimus, quare G L, quæ cadit infra G E cadet omnino [b] intra sectionem L G M, siue intra solidum, ac propterea planum inclinatum, quod per A F, & G L ducitur, secabit omnino interius solidum, ac de ipso quandam terminatam portionem auferet, cum idem planum inclinatum ponatur de exteriori terminatam portionem abscindere.



[a] 12. Archim. de Conoid. &c.

[b] 32. primi conic.

Itaque, cum in vtroque casu demonstratum sit, planum inclinatum transiens per A F, & G L, de interiori solido G H I aliquam portionem secare, possibile [c] erit ipsi plano, hoc est basibus vtriusque portionis, aliud planum æquidistans ducere, quod interioris portionis superficiem contingat: quare si mente concipiatur iam hoc ductum esse, ac vndique productum, patet hoc ipsum planum contingens, de prædicta exteriori portione dempta à plano per A F, & G L ducto, aliam portionem abscindere, sed illa omninò minorem (pars enim suo toto minor est) at hęc minor portio æqualis est [d] portioni A B F abscissæ à plano, quod per A F ductum fuit ad planum per axem A B C rectum (vtraque enim talium portionum terminatur à planis basium,

[c] 69. h.

[d] ex Sch. Prop. 80. huius.

 eiusdem

eiusdem similis concentrici solidi superficiem contingentium) ergo, & portio A B F à prædicto plano recto abscissa, erit minor eadem portione, quæ dempta fuit à plano per A F, & G L ducto, siue à plano, quod in constructione per A F obliquè ductum fuit super planum per axem A B C: & hoc semper verum esse demonstrabitur, quodcunque sit planum inclinatum transiens per A F; ergo portio solida A B F, quæ ex dato solido à plano per A F ducto, & ad planum per axem A B C erecto abscinditur, *MINIMA* est omnium portionum à quibuslibet alijs planis per eandem A F ductis abscissarum. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

EX eo, quod prope finem huius demonstratum est, elicitur, omnem portionem cuiuscunque prædictorum solidorum, cuius basis secet simile inscriptum solidum concentricum, maiorem esse qualibet alia portione de eodem exteriori solido, cuius basis contingat idem inscriptum solidum.

Ibi enim ostendimus prædictam exterioris solidi portionem, cuius basis secet inscriptum solidum, maiorem esse ea, cuius basis contingens idem inscriptum, simul sit parallela secanti basi; sed omnes portiones de eodem solido, quarum bases contingant idem simile inscriptum concentricum, inter se sunt [a] æquales: ergo patet propositum, &c.

[a] Propos. 80. h.

PROBL. XV. PROP. LXXXII.

Per datum punctum intra Conum rectum, vel Conoides Parabolicum, aut Hyperbolicum, siue Sphæram, aut Sphæroides oblongum, vel prolatum, planum ducere, quod de solido abscindat portionem MINIMAM; atque in Sphæroide, vel Sphæra portionem MAXIMAM.

ESto quodlibet prædictorum solidorum A B C, cuius axis reuolutionis sit B D, ac datum vbicunque intra solidum sit punctum E: oportet per E planum ducere, quod ex dato solido abscindat portionem *MINIMAM*, atque ampliùs in Sphæroide, vel Sphæra, portionem *MAXIMAM*. Oportet autem si solidum fuerit Sphæroides, vel Sphæra, quod datum punctum non sit idem, ac centrum, tunc enim neque *MAXIMA*, neque *MINIMA* portio exhiberi posset, cum omnia plana per centra eorum solidorum ducta in duas æquas portiones diuidant ipsa solida; veluti in Ellipsi, vel circulo dum quærebatur *MAXIMA*, & *MINIMA* portio, necesse fuit datum punctum non esse in centro, cum rectæ omnes per ipsum ductæ, huiusmodi superficies bifariam secent, vt iam satis constat.

Secetur solidum plano per axem B D, ac per datum punctum E transeunte, efficienteque in solido [b] genitricem sectionem A B C, quæ indefinitè producatur, ac de ipsa per idem punctum E, cum recta F E G abscin-

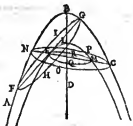
[b] 12. Archim. de Conoid. &c.

datur

datur [a] *MINIMA* portio plana F B G, & per eandem F E G agatur planum F H G I, quod ad ductum per axem A B C rectum sit. Dico tale planum F H G quæsitum soluere, siue de dato solido auferre portionem solidam F B G *MINIMAM* omnium, quæ ex eodem solido à quibuslibet alijs planis, per idem punctum E ducibilibus, abscindi possunt. a 41.42.h.

Iam patet primò portionem F B G *MINIMAM* esse [b] aliarum portionum abscissarum à planis, transeuntibus quidem per rectam F G, ac ideo per datum punctum E, non autem rectis super planum per axem A B C. Verùm quod sit quoque *MINIMA* abscindendarum ab alijs planis non per rectam F G, sed omnino per punctum E ducibilibus, sic demonstrabitur. b 81.h.

In plano enim per axem A B C descripta per punctum E (quod bifariam secat applicatam F G, vti elicitur ex 41. & 42. huius) simili, & concentrica sectione E L M; ipsa rectam F G continget [c] in E: & facta reuolutione ipsius sectionis E L M circa eundem axim B D, describetur simile concentricum solidum, quod continget [d] planum F H G I in E; itaque ducto per datum punctum E quolibet alio plano non per F G transeunte, sed neque per axim B D; (tunc enim planum hoc, datum solidum in duas partes diuideret, quarum vtra esset quidem maior portione F B G, quoniam vel esset infinitæ magnitudinis, si datum solidum fuerit Conus, vel Conoides, vel esset solidi dimidium, si fuerit Sphæroides, vel Sphæra, ac propterea omnino esset maior portione F B G, quæ dimidio occlusi solidi minor est, cum extra ipsam sit centrum; nam centrum *MINIMAE* portionis planæ F B G, quod idem est, ac centrum solidi, iam constat esse extra ipsam portionem, quando datum punctum E in sectione sit extra centrum, vt ponitur) patet id iuxta quandam rectam N E M C necessariò secare planum per axem A B C, in quo est punctum E. Et quoniam F G sectionem E L M contingit in E, recta N C, quæ per E ponitur transire, omninò secabit interiorem sectionem E L M, siue per aliquam sui partem, vt puta per E M, tota cadet intra sectionem E L M; sed sectio E L M tota est intra concentricum inscriptum solidum, cum sit ducta per axem, quare, & ipsa recta E M tota erit intra solidum inscriptum, vnde planum, quod modò per ipsam duximus, quodque de exteriori aufert solidam portionem N B C, cuius basis est N O C P, secabit prorsus interius solidum, deque ipso quandam solidam portionem abscindet, nimirum E L M, cuius basis sit E Q M R: portio igitur N B C, cuius basis est N O C P interius solidum secans, maior erit [e] portione F B G, cuius basis est F H G I idem interius solidum contingens, & hoc semper, quodcunque sit planum transiens per datum punctum E præter planum F H G I. Quare ex dato solido A B C per datum punctum E abscissa est *MINIMA* portio F B G. Quod faciendum erat. c 1.Corol. 68.h. d 55.h. e Schol. 81.h.



CO-

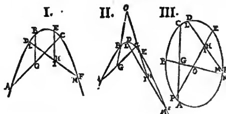
COROLL.

SI datum solidum fuerit quodcunque Sphæroides, vel Sphæra; patet reliquam portionem solidam, dempta *MINIMA* nuper inuenta, esse *MAXIMAM* quæsitam.

THEOR. LIII. PROP. LXXXIII.

Conuersum Prop. 79. h. Æquales portiones solidæ eiusdem Conoidis, vel Sphæræ, aut cuiuslibet Sphæroidis, si fuerint de eodem Conoide Parabolico habebunt axes æquales. Si de eodem Hyperbolico, vel de Sphæra, aut Sphæroide quocunque, erunt axes proprijs semi-diametris proportionales. At si fuerint de eodem Cono recto, extrema ipsorum axium pertingent ad idem inscriptum solidum simile, & concentricum.

SInt duæ de eodem quocunque prædictorum solidorum portiones æquales, quarum recti Canones concipiantur transferri super eadem sectione ABF per solidi axem ducta (hoc enim fieri posse manifestum est, cum ipsi recti Canones intra solidas portiones intercepti, sint portiones eiusdem sectionis, quæ in reuolutione circa axim solidum genuit) & sint ABC, DEF, quarum bases sint AC, DF, & diametri BG, EH, quæ simul sunt



a 3. Schol. 69. h. axes solidarum a portionum. Dico, in prima figura exhibente Conoides Parabolicum, axes BG, EH esse inter se æquales, & in secunda exhibente Hyperbolicum, atque in tertia Sphæram, vel Sphæroides, quarum centra sint O, esse axim HE ad semi-diametrum EO, vt axis GB ad semi-diametrum BO.

Ex altero axium, videlicet ex EH, secetur in prima figura segmentum EI ipsi BG æquale; & in reliquis, fiat OE ad EI, vt OB ad BG, in omni-

omnibus verò per I applicetur ordinatim ad E I recta L I M, quæ rectæ D F æquidistabit, & per ipsam L I M concipiatur duci planum, quod plano per D F transeunti, siue basi portionis solidæ D E F æquidistet, aliam portionem solidam abscindens L E M, quæ portioni solidæ A B C *a* æqualis erit; sed ponitur etiam D E F eidem A B C æqualis; ergo duæ L E M, D E F inter se æquales erunt, sed vtraque est de eodem solido, circa communem axim E H I, & super bases parallelas, quare planum basis ductum per L M, congruet cum plano basis, quod transit per D F, vnde, & axis terminus I, cum termino axis H. Erit ergo axis E I æqualis axi E H. Sed in prima, factus fuit E I æqualis B G, & in reliquis O E ad E I, vt O B ad B G, quare axis quoque E H, in prima, æquabitur axi B G, in alijs verò erit O E ad E H, vt O B ad B G, & conuertendo H E ad E O, vt G B ad B O. *a* 79. h.

Sint tandem duæ æquales portiones de eodem Cono recto A B C, D B E, quarum recti Canones concipiantur coaptari super eadem sectione A B E per solidi axem ducta, & sint A B C, D B E, quarum bases A C, D E, & diametri B F, B G, (quæ iam sunt *b* axes solidarum portionum.) Et per F cum asymptotis B A, B C describatur Hyperbole F G; quæ omnino continget *c* A C in F, termino axis B F. Dico iam extremum G axis B G, ad eandem quoque sectionem pertingere: hoc est sectionem F G secare diametrum B G in puncto G. Si possibile, est sectio F G alibi secet axim B G, vt infra G in puncto H, & per H ducatur L H M ipsi D E æquidistans: erit D G ad G E, vt L H ad H M, estque D G æqualis G E, quare L M quoque bifariam secta erit in H: sed dicitur per H transire sectionem, ergo L M ipsam *d* continget in H, quapropter portio plana L B M æquabitur *e* portioni A B C, & si per L M agatur planum secans Conum, & ad planum L B M rectum, quod & plano datæ portionis solidæ D B E per D E ductum æquidistabit, cum hoc ad idem planum L B M ponatur rectum esse; erit solida portio L B M æqualis *f* portioni A B C, cum earum recti Canones L B M, A B C æquales sint ostensi; sed D B E quoque eidem A B C data est æqualis, ergo duæ portiones L B M, D B E simul æquales erunt, totum suæ parti, quod est absurdum: non ergo sectio F G secat axim B G infra H; & ob eandem rationem neque supra; ergo sectio F G omnino transibit per G extremum axis B G: sed facta reuolutione anguli, ac sectionis circa communem axim procreatur Conus, & Conoides Hyperbolicum simile, ac concentricum: ergo F, G, extrema puncta axium æqualium portionum solidarum A B C, D B E, ex eodem Cono recto, pertingunt ad idem Conoides Hyperbolicum simile, & concentricum inscriptum. Quod vltimò demonstrandum erat.

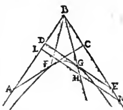
b 3. Schol. 69. h.

c 1. Coroll. 68. h.

d ibidem.

e 45. h.

f 78. h.



THEO-

THEOR. LIV. PROP. LXXXIV.

Conuerf. Prop.78. huius. Æquales portiones de eodem solido, quodcunque sit ex sæpius memoratis, habent Canones rectos, in ipsis interceptos, inter se æquales.

a 83. h. Etenim huiusmodi portiones solidæ æquales, habent axes, a vel inter se æquales, vel proprijs semi-diametris proportionales, vel ad idem Conoides simile concentricum, & inscriptum pertingentes, sed ijdem axes sunt quoque b diametri prædictorum Canonum, & quando hæ diametri habuerint conditiones huiusmodi, ipsi Canones recti sunt c æquales, ergo solidæ portiones æquales, habebunt rectos Canones inter se æquales. Quod erat, &c.

b 3. Schol. prop. 69. huius. c 40. h. & ex 45. h.

THEOR. LV. PROP. LXXXV.

Conuerf. Prop.80. huius. Bases æqualium portionum ex eodem quocunque prædictorum solidorum, superficiem eiusdem similis inscripti solidi concentrici ad earum centra contingunt.

Portiones enim æquales eiusdem solidi habent rectos Canones in ipsis interceptos inter se d æquales, sed quando huiusmodi Canones sunt æquales (si concipiantur translati super eandem sectionem solidi genitricem) ipsorum bases ad puncta media, eandem concentricam, inscriptam, & similem sectionem e contingunt, & bases solidarum portionum transeunt per has bases rectorum Canonum, atque ad eos sunt erectæ, nempe ad planum per axem dati solidi, quare eędem bases solidarum portionum contingent superficiem interioris solidi concentrici ab inscripta concentrica sectioni geniti (dum hæc circa axim conuertatur) ad eadem puncta, f in quibus bases planarum, sectionem interiorem contingunt; quę puncta sunt centra axium, vel basium solidarum portionum ex Archimede, & ex iam à nobis animaduersis.

d 84. h. e 68. h. f 55. h.

THEOR. LVI. PROP. LXXXVI.

Solidæ portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis, siue Sphæræ, aut Sphæroidis, quarum axes (pro Cono recto) pertingant ad idem inscriptum concentricum Conoides Hyperbolicum (vel pro Conoide Parabolico) sint æquales (siue pro reliquis) ad proprias semi-diametros eandem habeant rationem, habent bases altitudinibus reciprocè proportionales.

Esto vt ponitur dico, &c.

Prop. 79. huius. Etenim cum axibus huiusmodi solidarum portionum insint prædictæ conditiones, ipsæ portiones solidæ æquales g erunt, pariterque earum

recti

recti Canones erunt a æquales (eo quod ijdem sint b axes solidarum, & diametri Canonum) ac propterea ipsorum bases altitudinibus erunt c reciprocè proportionales, sed in æqualibus portionibus de eodem solido, vt sunt bases rectorum Canonum ita sunt d bases solidarum portionum, & altitudines tùm portionum, tùm Canonum sunt e eædem, ergo in datis portionibus, quibus insunt prædictæ conditiones, erunt quoque bases altitudinibus reciprocè proportionales. Quod erat, &c.

a 84. h.
b 3. Schol. 69. h.
c 65. h.
d 2. Coroll. 78. h.
e 3. Schol. 69. h.

THEOR. LVII. PROP. LXXXVII.

Æquales portiones solidæ de eodem Conoide, vel Sphæra, aut quocunque Sphæroide, vel etiam de Cono recto, habent bases altitudinibus reciprocè proportionales: & è conuerso.

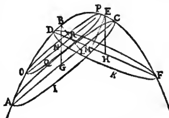
Si bases portionum de eodem solido fuerint altitudinibus reciprocè proportionales, ipsæ portiones æquales erunt.

QVando enim huiusmodi portiones solidæ sunt æquales, necessariò earum axes (si portiones fuerint de eodem Conoide Parabolico) erunt æquales (si de eodem Hyperbolico, aut Sphæra, aut Sphæroide) erunt f proprijs semi-diametris proportionales; sed in his casibus eædem portiones solidæ habent g bases altitudinibus proportionales, ergo, & cum portiones de eodem quocunque prædictorum solidorum fuerint æquales, ipsarum bases altitudinibus reciprocabuntur.

f 83. h.
g 86. h.

De portionibus autem æqualibus eiusdem, vel etiam diuersi Coni recti, aut obliqui, iam id ostensum fuit à Commandino in Comment. super Archim. de Conoid. &c. Quod erat primò, &c.

PRæterea sint duæ solidæ portiones A B C, D E F de eodem solido, quodcunque sit ex prædictis (quæ tamen in Sphæroide non excedant eius dimidium) quarum axes sint B G, E H, & bases A I C, D K F, altitudines verò B L, E M, & sit basis A I C ad D K F reciprocè, vt altitudo E M ad B L. Dico has portiones inter se æquales esse.



Concipiantur ipsarum solidarum portionum recti Canones A B C, D E F, quorum diametri, & altitudines eædem h erunt atque axes, & altitudines solidarum portionum.

h 3. Schol. 69. h.

Iam, si huiusmodi Canones sunt æquales, & portiones solidæ æquales i erunt. At si dicatur eos inæquales esse, alter ipsorum, vt puta A B C, altero D E F maior erit: vnde

i 78. h.

& diameter BG erit æquo maior: si igitur ipsa ad æquum reducatur in N, ita vt, vel BN sit æqualis ipsi EH, (dum solidum fuerit Conoides Parabolicum,) vel ita vt BN, & EH ad proprias semi-diametros sint in eadem ratione,) dum solidum fuerit Hyperbolicum, vel Sphæra, aut Sphæroides;) vel ita vt eędem pertingant ad eandē similem concentricam sectionem inscriptā erit BN omnino minor BG, & si per N agatur ipsi AC ęquidistans ONP, quę ad eandem diametrum BG erit ordinatim ducta, atq; minor ipsa AC, fiet portio, seu Canon OBP æqualis [a] portioni, siue Canoni DEF, & ipsa OP secabit BL in R, eritque BR altitudo Canonis OBP, cum ob parallelas sit angulus BRN rectus: & si per rectam OP ducatur planum OQP, quod basi AIC sit parallelum, siue rectum ad Canonem ABC, id abscindet ex dato solido portionem OBP, cuius altitudo erit BR eadem atque Canonis OBP. Cumque Canon OBP æqualis sit Canoni DEF, erit solida portio OBP [b] æqualis solidæ portioni DEF, ac ideo vt basis OQP ad basim DKF, ita [c] reciprocè altitudo EM ad altitudinem BR, estque basis DKF ad basim AIC, ex hypothesi, vt altitudo BL ad altitudinem EM, quare, ex æquali in ratione perturbata, erit basis OQP ad basim AIC, vt altitudo BL ad altitudinem BR, sed est BL maior BR, ergo & basis OQP maior erit basi AIC, quod est falsum, cum sit minor, eò quod OP diameter Ellipsis, aut circuli OQP minor sit homologa diametro AC similis [d] Ellipsis, vel circuli AIC. Non erit ergo Canonum ABC, DEF alter altero maior, quare inter se æquales esse necesse est: ideoque, & portiones solidæ ABC, DEF ęquales [e] erunt. Quod secundò ostendere propositum fuit.

a 40. h. & ex 45. h.

b 78. h.

c ex prima parte huius.

d Coroll. 15. Arch. de Conoid. &c.

e 75. h.

THEOR. LVIII. PROP. LXXXVIII.

Æquales portiones solidæ de eodem quocunque Conoide, aut Sphæra, aut Sphæroide ad sibi inscriptam Coni portionem, vel ad circumscriptum Cylindricum, vnam, eandemque simul habent rationem.

Etenim huiusmodi portiones habent bases altitudinibus reciprocè proportionales, vt in præcedenti, primo loco demonstratum est, sed bases, & altitudines portionum eædem sunt, ac bases, & altitudines inscriptarum Coni portionum, quare, & Coni portionum bases ipsarum altitudinibus erunt reciprocè proportionales, sed eædem portiones Conorum sunt

inter

inter se [a] solida Acuminata proportionalia, & bases altitudinibus reciprocantur, vnde Coni portiones inscriptæ inter se æquales [b] erunt; erit ergo solida portio ad portionem æqualem de eodem solido, vt inscripta Coni portio ad inscriptam Coni portionem (ob æqualitatem) & permutando solida portio ad sibi inscriptam Coni portionem, vt altera æqualis portio ad sibi inscriptam Coni portionem, & sumptis consequentium [c] triplis, solida portio ad circumscriptum Cylindricum, vt reliqua portio ad sibi circumscriptum Cylindricum, &c. Quod erat, &c.

a 70. h.
b 74. h.
c ex Command. in lib. de Conoid. & Sphæroid. Archim.

THEOR. LIX. PROP. LXXXIX.

MAXIMA portionum eiusdem Coni recti, aut Conoidis Hyperbolici, siue Sphæroidis oblongi, vel prolati, & quarum axes sint æquales, ea est, cuius axis congruat cum axe sectionis, quæ solidum genuit; & respectiuè ad Sphæroides, cum minori axe Ellipsis genitricis.

MINIMA verò, cuius axis congruat cum maiori axe eiusdem Ellipsis.

ETenim quando portiones eiusdem Coni recti, aut Conoidis Hyperbolici, siue Sphæroidis cuiuslibet sunt æquales, & eorum recti Canones sunt [d] æquales, & quando recti Canones siue portiones de eodem angulo, vel Hyperbola, aut Ellipsi æquales sunt, inter ipsorum diametros *MINIMA* est [e] ea, quæ simul sit axis anguli, vel Hyperbolæ, & in Ellipsi, quæ sit axis minor, & *MAXIMA*, quæ sit axis maior, ergo, & dum portiones eiusdem Coni recti, aut Conoidis Hyperbolici, vel Sphæroidis fuerint æquales, inter ipsorum axes (qui iisdem sunt, [f] ac diametri rectorum Canonum) *MINIMVS* erit is, qui congruet cum axe Coni, vel Conoidis Hyperbolici, aut cum minori axe Ellipsis Sphæroidis, & *MAXIMVS*, qui congruat cum maiori: quare si primùm axes harum omnium çqualium portionum, dempta ea circa *MINIMVM* axem, huic *MINIMO* axi æquales secentur, atque ex intersectionibus ducantur plana basibus portionum æquidistantia, auferentur ab ipsis portiones solidæ æqualium axium, sed vnaquæque erit minor quacunque æqualium portionum, (cum sit pars suo toto minor) ac propterea minor ea, è cuius, axe, siue à qua portione nihil ablatũ fuit, quę quidem ea est, cuius axis congruit cum axe Coni recti, vel Conoidis Hyperbolici, & in Sphæroide cum minori axe Ellipsis genitricis. Si ergo omnes aliæ portiones æqualium axium sunt hac portione minores, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis congruit cum axe dati Coni, vel Conoidis Hyperbolici, & pro Sphæroide, cum minori axe genitricis Ellipsis, earundem omnium portionum, æqualium axium, *MAXIMA*. Quod primò erat, &c.

d 84. h.
e Schol. post 51. h. ad nu. 1.
f 3. Schol. 69. h.

PRæterea si axes omnium æqualium portionum eiusdem Sphæroidis producantur, ac prædicto *MAXIMO* axi (qui iam, vt superiùs dixìmus,

congruit cum maiori axe Sphæroidis) æquales secentur, atque ex intersectionum punctis plana ducantur portionum basibus æquidistantia, abscindentur portiones solidæ æqualium axium, & vnaquæque erit maior qualibet æqualium (totum enim sua parte maius est) ac ideò maior ea portione, cuius axi, vel cui portioni nihil additum fuit, quæ quidem est ea, cuius axis congruit cum maiori axe Sphæroidis. Itaque si omnes planæ portiones æqualium axium sunt hac portione maiores, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis conuenit cum maiori axe Sphæroidis, *MINIMA* earundem omnium portionum æqualium axium, in casibus tamen possibilibus. Quod vltimò demonstrandum erat.

THEOR. LX. PROP. LXXXX.

MAXIMA portionum de eodem Cono recto, vel de quocunque Conoide, aut Sphæroide, & quarum bases sint æquales, ea est, cuius axis sit segmentum maioris semi-axis genitricis sectionis dati solidi, respectiuè ad Sphæroides.

In Sphæroide autem, MINIMA, cuius axis sit segmentum minoris semi-axis Ellipsis, quæ solidum procreat.

a 84. h. QVando enim portiones eiusdem Coni recti, vel cuiuslibet Conoidis, aut Sphæroidis sunt æquales, & recti earum Canones sunt [a] æquales, & cum recti Canones, vel portiones de eodem angulo, vel de

b Schol. post 51. h. ad nu. 2. eadem coni-sectione, quæ solidum genuit æquales sunt, inter ipsorum bases, *MINIMA* est [b] ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maioris axis respectiuè ad Ellipsim, & *MAXIMA* eius, cuius diameter sit segmentum minoris, atque vt sunt bases æqualium planarum portionum de eodem

c 2. Coroll. 78. h. angulo, vel coni-sectione, ita sunt [c] bases solidarum portionum, quarum ipsæ planæ portiones sint recti Canones, ergo & inter bases æqualium portionum de eodem Cono recto, vel Conoide, aut Sphæroide quocunque,

d 3. Schol. 69. h. *MINIMA* erit ea illius portionis, cuius axis (qui idem est [d] cum diametro recti Canonis) congruat cum maiori axe genitricis sectionis solidi, cuius est portio, & *MAXIMA*, in Sphæroide, erit basis illius portionis, cuius axis sit segmentum minoris axis Ellipsis genitricis eiusdem Sphæroidis; quare si primò intra has æquales portiones, dempta ea super *MINIMA* basi, ducantur plana basibus æquidistantia, quorum vnumquodque efficiat in portione sectionem prædictæ *MINIMAE* basi æqualem (hoc autem fieri posse, & quomodò infra docebimus) per huiusmodi plana abscindentur portiones solidæ æqualium basium, sed harum quælibet minor erit quacunque æqualium portionum (cum sit pars minor suo toto) ideoque minor ea, à qua nihil ablatum fuit, siue minor ea, cuius axis conuenit cum maiori axe dati solidi. Si ergo omnes aliæ portiones æqualium basium hac portione sunt minores, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis est segmentum maioris semiaxis sectionis genitricis dati solidi earundem portionum æqualium basium, ac de eodem solido *MAXIMA*, &c.

Quod

QVod autem in quolibet Sphæroide, inter portiones eius dimidio minores, & æqualium basium, *MINIMA* sit ea, cuius axis sit segmentum minoris axis Ellipsis datum Sphæroides procreantis, id consimili constructione, atque argumentis ostendetur, vti factum fuit in secunda parte Prop. 50. huius, si tamen super tertia figura lineæ rectæ, & Ellipses ibi animaduersæ, concipiantur tanquam bases solidarum portionum, & veluti Sphæroidalia solida, &c. Quod fuit, &c.

COROLL.

HInc constat *MINIMAM* portionum semi-Sphæroide maiorum, & quarum bases sint æquales, eam esse, cuius axis sit segmentum maioris axis Ellipsis genitricis; *MAXIMAM* autem, cuius axis sit segmentum minoris.

SCHOLIVM.

QVod superius promissimus absoluetur sic, super figuras prædictæ 50. h. Cum ibi sit AC minor HI, erit quoque dimidium DC minus dimidio FI. Detrahatur ergo FP, quę sit media proportionalis inter FI, DC; agatur PR diametro FO æquidistans, & sectioni occurrens in R, atque ex R applicetur RQS, & facta figurarum reuolutione circa axim BD, concipiantur describi solida, &c. è quibus cum planis per rectas AC, HI, SR ductis, & ad easdem genitrices sectiones erectis, abscindentur portiones solidæ ABC, HOI inter se [a] æquales, & portio SOR. Dico huius basim per SR ductam, æqualem esse basi per AC. a 80. h.

Nam basis per HI ad basim per AC, est [b] vt recta HI ad rectam AC, vel sumptis dimidijs, vt FI ad DC, vel vt quadratum FI, ad quadratum FP, siue ad quadratum QR, vel sumptis quadruplis, vt quadratum HI ad quadratum SR, sed etiam basis per HI ad basim per SR, est vt quadratum HI ad quadratum SR, cum ob planorum æquidistantiam sint [c] sectiones similes, ergo basis per HI ad basim per AC, erit vt eadem basis per HI ad basim per SR: vnde basis per SR æqualis est basi per AC, &c. Quod facere oportebat. b 2. Co-78. h. c Coroll. 15. Arch. de Conoid.

THEOR. LXI. PROP. LXXXXI.

MINIMA portionum de eodem Cono recto, vel de quocunque Conoide, aut Sphæroide, & quarum altitudines sint æquales ea est, cuius axis congruat cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi.

In Sphæroide, MAXIMA est, cuius axis cum minori axe eiusdem genitricis sectionis conueniat.

NAm quando portiones de eodem Cono recto, vel Conoide, aut Sphæroide quocunque sunt æquales, & ipsarum recti Canones inter se sunt

a 84. h. sunt a æquales, quando verò recti Canones, siue portiones de eodem angulo, vel de eadem coni-sectione, quæ solidum procreat æquales sunt, inter
b Schol. post 51. h. ad nu. 3. ipsarum altitudines *MAXIMA* est b ea illius portionis, cuius diameter sit segmentum maioris axis, & *MINIMA*, cuius diameter sit segmentum minoris; atque altitudines, & diametri rectorum Canonum, siue planarum
c 3. Schol. 69. h. portionum eædem sunt, c ac altitudines, & axes solidarum, ergo, & dum portiones eiusdem Coni recti, vel Conoidis, aut Sphæroidis sunt æquales, inter earum altitudines *MAXIMA* erit ea illius portionis, cuius axis sit segmentum maioris axis genitricis solidi, cuius est portio, & *MINIMA* eius, cuius axis sit segmentum minoris. Itaque si primò altitudines omnium harum æqualium portionum, (dempta ea circa *MAXIMAM* altitudinem) producantur, & huic *MINIMAE* altitudini æquales fiant, atque ex intersectionum punctis ducantur plana portionum basibus æquidistantia, abscindentur ab ipsis portiones solidæ æqualium altitudinum, & vnaquæque maior erit quacunque æqualium portionum (nam totum sua parte maius est) vnde, & maior ea portione, cuius altitudini, vel cui portioni nihil additum fuit, quæ ea est, cuius axis conuenit cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi. Si ergo omnes aliæ portiones æqualium altitudinum hanc portionem excedunt, erit è contra hæc ipsa portio, cuius axis congruit cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi aliarum portionum æqualium altitudinum *MINIMA*.

PRo Sphæroide autem, si altitudines omnium prædictarum æqualium portionum (dempta ea circa *MINIMAM* altitudinem, quæ iam ea est circa minorem axem Ellipsis Sphæroidis genitricis) æquales secentur eidem *MINIMAE* altitudini, atque per puncta sectionum, plana solidarum portionum basibus æquidistantia ducantur, hæc à portionibus auferent portiones solidas æqualium altitudinum, sed vnaquæque ipsarum minor erit quacunque æqualium portionum (eò quod pars suo toto sit minor) quapropter & minor ea portione à cuius altitudine, vel à qua portione nihil demptum fuit, quæ quidem est ea, cuius axis congruit cum minori axe Ellipsis datum Sphæroides procreantis: si igitur omnes portiones æqualium altitudinum hac portione sunt minores, erit ex aduerso hæc eadem portio, cuius axis conuenit cum minori axe genitricis Ellipsis dati Sphæroidis earundem omnium portionum, æqualium altitudinum, *MAXIMA*. Quod tandem supererat demonstrandum.

SCHOLIVM.

HVc etiam, prout exposuimus in Scholio post 51. huius, hæc tria sunt animaduertenda. Videlicet.

I. INter axes æqualium portionum eiusdem Coni recti, vel Conoidis Hyperbolici, aut cuiuscunque Sphæroidis, *MINIMVS* est is eius portionis, cuius axis congruat cum axe, & pro Sphæroide, cum minori axe genitricis sectionis dati solidi, & in Sphæroide *MAXIMVS* eius portionis, cuius axis congruat cum maiori axe eiusdem genitricis sectionis.

2. Inter

2. INter bases æqualium portionum de eodem Cono recto, aut de quocunque Conoide, aut Sphæroide *MINIMA* est ea illius portionis, cuius axis sit segmentum axis, & pro Sphæroide sit segmentum maioris axis genitricis sectionis dati solidi. *MAXIMA* verò eius, cuius axis sit segmentum minoris axis eiusdem sectionis genitricis.

3. INter altitudines æqualium portionum de eodem Cono recto, siue de quolibet Conoide, aut Sphæroide, *MAXIMA* est ea illius portionis, cuius axis congruat cum maiori axe genitricis sectionis dati solidi, & in Sphæroide *MINIMA* eius, cuius axis cum minori axe eiusdem genitricis sectionis conueniat.

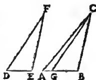
Quæ omnia, ex hucusque demonstratis, paucis ostendentur (vti factum fuit in præfato Scholio, & super easdem figuras 51. h.) consimilibus, ac ibi argumentis, veruntamen circa solidas portiones versantibus, è quibus denique vniuscuiusque trium proximè præcedentium propositionum veritas iterum elucescet. Sed de his hactenus.

MONITVM.

PLacuit SERENO, Antinsensi Philosopho, in quibuslibet Conis terminatis MAXIMVM, & MINIMVM triangulum per verticem ductum inquirere, liceat nobis tanti Geometræ vestigia insequentibus in Cono pariter terminato quocunque MAXIMAM, & MINIMAM Parabolæ portionem assignare, pro cuius indigatione nonnulla circa plana, nec præter susceptam materiam, nec scitu iniucunda occurrunt afferenda.

LEMMA XVI. PROP. XCII.

Si duo triangula habuerint latus lateri æquale, atque alterum adiacentium angulorum in vno triangulo, alteri adiacentium in reliquo æqualem, sitque reliquus angulus adiacentium in primo, maior reliquo adiacentium in altero, & latus illi oppositum, latere huic opposito maius erit.



SInt duo triangula ABC, DEF, quorum latera BC, EF sint æqualia, & anguli pariter ABC, DEF æquales, angulus verò ACB maior sit angulo DFE. Dico, & latus AB maiori angulo oppositũ, maius esse latere DE opposito minori.

Fiat angulus BCG æqualis ipsi EFD.

Et

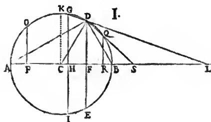
Et quoniam angulus quoque G B C ponitur æqualis angulo D E F, & latus B C lateri E F æquale, erunt in triangulis G C B, D F E reliqua latera G B, D E æqualibus angulis opposita, inter se æqualia, sed est latus A B maius latere B G, cum recta C G secet angulum A C B, ergo latus A B erit quoque maius latere D E. Quod erat probandum.

PROBL. XVI. PROP. XCIII.

A data circuli peripheria arcum abscindere, ita vt rectangulum sub eius chorda in sagittam sit MAXIMVM.

1. Esto circulus, cuius diameter A B, centrum C, & exequi oporteat, quod imperatum est.

Sumantur in peripheria, hinc inde à puncto A, duo trientes A D, A E, & iungatur chorda D E secans diametrum A B in F. Dico arcum D A E esse quæsitum; hoc est rectangulum sub eius chorda D E in sagittam A F esse *MAXIMVM*.



Secta enim semi-peripheria A K B bifariam in K, iunctaque K C, ac sumpto in arcu D K quolibet puncto G, quod vel in ipsum K, vel inter K, & D vbicunque cadat, demissaque ex G super diametrum A B perpendiculari G H, quæ producta occurrat peripheriæ in I, iungatur G D.

Et cum arcus A G sit non minor quadrante A K, erit duplus G A I non minor semi-circulo, atque arcus D A I omnino maior semi-circulo; vnde iuncta G D, angulus I G D erit acutus, estque G H B rectus, quare duo simul D G H, G H B duobus rectis minores erunt, ex quo G D producta conueniet cum diametro ad partes D, vt in L. Et cum arcus A K D, A I E sint trientes totius peripheriæ, erit D B E, quod superest de asse, eiusdem peripheriæ triens, siue æqualis arcui A I E, itaque arcus D B I erit maior arcu A I E: si ergo iungatur A D, erit angulus A D E, siue A D F minor angulo I G D, siue parallelarum externo F D L,

suntque

suntque in triangulis DFA, DFL anguli ad F æquales, cum sint recti, & latus FD commune, atque angulus ADF minor est angulo LDF, quare & latus AF minus [a] erit latere FL, & AH eò minus FL; habebit ergo HF ad FL minorem rationem, quàm eadem FH ad HA, & componendo HL ad LF, siue GH ad DF, minorem quam FA ad AH, vnde rectangulum GHA sub extremis minus [b] erit rectangulo DFA sub medijs, & hoc semper, vbicunque sumptum sit punctum G, vel inter D, & K, vel in ipso K, nempe rectangulum ad G, vel K, pertingens, minus esse rectangulo DFA, siue DFA maius esse quocunque prædictorum rectangulorum GHA, vel KCA, &c. [a] 91. h. [b] 16. sept. P. ppi.

Si autem punctum sumatur in quadrante AK, vt in O; demissa perpendiculari OP. Cum sit KC maior OP, & CA maior AP, erit rectangulum KCA maius rectangulo OPC, sed rectangulum DFA ostēsum est maius rectangulo KCA, ergo rectangulum DFA eò amplius maius erit rectangulo OPA.

Si denique punctum sumatur in peripheriæ sextante DB, veluti in Q, demissa perpendiculari QR, & iuncta DQ, & producta, ipsa conueniet omnino cum diametro AB ad partes B, vt in S, quoniam angulus EDQ est in portione EAQ semi-circulo maiori, ac propterea acutus, & angulus DFS rectus est, &c. Et cum arcus AIE æqualis sit arcui DBE, vterque enim est triens peripheriæ, erit arcus AIE maior arcu QBE, ac ideo angulus ADE, vel ADF maior angulo QDE, vel SDF, sed in triangulis AFD, SFD latus FD est commune, & anguli ad F sunt æquales, eò quod sint recti, & angulus ADF maior est angulo SDF, vnde latus AF maius est [c] latere FS, & adhuc maius latere RS, habebit ergo FR ad RS maiorem rationem quàm eadem RF ad FA, & componendo FS ad SR, vel DF ad QR, maiorem quàm RA ad AF; vnde rectangulum DFA sub extremis, maius [d] erit rectangulo QRA sub medijs, & hoc semper vbicunque assumptum sit punctum Q in sextante DB. Quare cum rectangulum AFD demonstratum sit maius omnibus applicatis, tum in triente AD, tum in sextante DB, ipsum AFD erit *MAXIMVM*, & sumptis duplis, rectangulum sub sagitta AF in chordam DE, erit *MAXIMVM* rectangulum sub qualibet alia sagitta in suam chordam. Quod, &c. Quodque alibi aliter enodabimus. [c] 92. h. [d] 16. sept. Pappi.

2. AD pleniorem autem doctrinā, in proxima sequenti secunda figura, manentibus positione iisdem punctis K, D, E, dico talium rectangulorum id, quod puncto D propinquius est, semper maius esse remotiori.

Nam de ijs, quæ ad arcum quadrantis AK pertingunt, vtputa de rectangulis ACK, AFR, AHG, &c. patet ACK propinquius puncto D maius esse rectangulo AFR, quod ab ipso D magis remouetur, & AFR maius esse AHG, &c. cum, tum altitudines KC, RF, GH, tum bases CA, FA, HA continuè decrescant.

De ijs verò, quæ perueniunt ad arcum KD, videlicet in punctis I, L, ita ratiocinabimur. Demittantur ex I, L ad diametrum perpendiculares IMN, LOP, & iungatur IL, quæ producta conueniet ad partes L cum diametro in Q (nam arcus NAL maior est semi-peripheria, ex

R quo

quo angulus NIL est acutus, atque IMO rectus est, ideoque duo simul NIL, IMB duobus rectis minores.) Et cum arcus AE æqualis sit arcui DE, erit arcus AP minor arcu DE, & multò minor arcu LBN: vnde iuncta AL, erit angulus ALP, siue ALO minor angulo LIN, siue LIM, siue angulo QLO parallelarum externo, estque in triangulis ALO, QLO latus OL commune, & anguli ad O sunt æquales, cum sint recti,

a 92. h. ergo latus AO erit minus [a] latere OQ, & AM eò minus OQ; habebit igitur OM ad MA maiorem rationem, quàm MO ad OQ, & componendo OA ad AM maiorem quàm MQ ad QO, vel quàm IM ad LO, vnde rectangulum AOL sub extremis, quod propinquius est puncto D,

b 16. sept. Pappi. maius [b] erit rectangulo AMI sub medijs, quod à puncto D magis distat.

De rectangulis denique pertingentibus ad puncta in sextante DB, nimirum ad S, T, idem sic demonstrabitur. Ductis enim SVY, TX diametro perpendicularibus, & iunctis AS, & ST, hæc producta conueniet cum AB in Z, quoniam angulus TSY est in portione TAY semi-circulo maiori, nempe acutus, & angulus SVB rectus est, &c. Et cum arcus AEY sit triente maior, & arcus YBT minor EBD, siue minor triente, erit angulus ASY, siue ASV maior angulo YST, siue VSZ, & in triangulis ASV, ZSV sunt anguli ad V æquales, cum sint recti, & latus SV com-

c 92. h. mune, ergo latus AV erit [c] maius latere VZ, & eò maius latere XZ: habebit ergo VX ad XZ maiorem rationem quàm ad VA, & componendo, VZ ad ZX, siue SV ad TX maiorem rationem quàm XA ad A

d 16. sept. Pappi. V: quapropter rectangulum SVA sub extremis, quod propius est puncto D maius erit [d] rectangulo TXA sub medijs, quod à puncto D magis distat. Quod ex abundanti ostendere propositum fuit.

SCHOLIVM.

EX eo, quod ad num. 1. superiùs ostensum fuit; facilè constat, in prima figura, quæsitam chordam DE secare circuli diametrum AB in F, in 5 ratione ad 1.

Nam iunctis CB, BD. Cum sit arcus BD circuli sextans, ipsius chor-

DB

da BD erit æqualis radio BC, siue CD, vnde in triangulo æquilatero CDB anguli ad C, B, æquales erunt, & in triangulis CFD, BFD cum anguli ad C, B, sint æquales, atque etiam æquales ad F, cum sint recti, & latus DF commune, erit reliquum latus CF, reliquo FB æquale, estq; AC æqualis CB, ergo AF erit tripla FB.

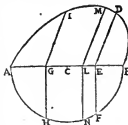
Verum hæc omnia consimili ratione persolui, ac verificari de rectangulis in Ellipsi applicatis, &c. ita sequenti Problemate demonstrabitur.

PROBL. XVII. PROP. XCIV.

Ad diametrum datæ semi-Ellipsis rectam applicare, cuius rectangulum in alterum diametri segmentum sit MAXIMVM.

1. ESto semi-Ellipsis ADB, cuius centrum C, & diameter AB, ad quam applicare oporteat DE, ita vt rectangulum AED sit *MAXIMVM*. Secetur BC bifariam in E, applicetur que ED, quæ erit quæsita.

Nam descripto super AB semi-circulo AFB, erigatur ex E ipsi AB perpendicularis EF. Patet ex præcedenti Scholio, rectangulum AEF esse *MAXIMVM* in semi-circulo, &c. cum AE sit tripla EB.



Sumatur ampliùs quodlibet aliud punctum G, præter E, applicenturq; tum in semi-circulo, tum in semi-Ellipsi rectæ GH, GI. Et cum sit quadratum EF ad GH vt rectangulum AEB ad AGB, vel vt * quadratum ED ad GI, erit & linea EF ad GH, vt ED ad GI, sed ratio rectanguli AEF ad rectangulum AGH componitur ex ratione EF, ad GH, siue ex ratione ED ad GI, & ex ratione EA ad AG, atque rectangulum AED ad AGI ex iisdem componitur rationibus, vnde rectangulum AEF ad AGH erit vt rectangulum AED ad AGI, & hoc semper, sed est rectangulum AEF *MAXIMVM* in semi-circulo, ergo, & AED erit *MAXIMVM* in semi-Ellipsi. Applicatum est ergo, &c. Quod erat faciendum. * 21. primi conic.

2. QVod autem eorum, quæ hinc inde à puncto D applicantur, nempe de rectangulis ALM, AGI id, quod *MAXIMO* propius est maius sit remotiori, eadem penitus arte nuper adhibita ostendetur, si ex L in semi-circulo applicetur LN. Nam eodem argumento demonstrabitur rectangulum ALM ad AGI, esse vt ALN ad AGH, sed ALN maius est AGH, prout in præcedenti ad num. 2. conclusum fuit, ergo & rectangulum ALM maius erit rectangulo AGI, & hoc semper verum est, tum

de applicatis ad puncta arcus A I D, tum de ijs, quæ pertingunt ad puncta reliqui arcus D B, hoc est prædicta rectangula hinc inde à puncto D, continuè decrescere, quò magis distant à *MAXIMO* rectangulo A E D.

Hinc soluendum sit obuiam Problema huiusmodi.

PROBL. XVIII. PROP. XCV.

In dato semi-circulo, vel semi-Ellipsi, hinc inde à MAXIMO rectangulo nuper inuento, bina æqualia rectangula reperire.

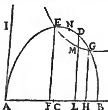
Sit datus semi-circulus, vel semi-Ellipsis, cuius diameter A B, centrum C, & punctum, ad quod peruenit *MAXIMVM* rectangulum, sit D, (quod habebitur si diameter A B secetur in L, ita vt A L sit [a] tripla L B, & applicetur L D,) sitque exempli gratia è quolibet puncto E arcus A E D, applicata E F ad diametrum A B, & oporteat in reliquo arcu D B punctum G reperire, ita vt ducta G H ipsi E F parallela, rectangula A F E, A H G inter se sint æqualia.

[a] Schol. 93. h. & ex 94. h.

Ducatur ex A sectionem contingens A I, quę ipsis applicatis æquidistabit, atque in angulo asymptotali I A B per punctum E describatur [b] Hyperbole E G. Dico hanc necessariò in aliquo puncto circuli arcum D B secare, vt in G, & hoc esse quæsitum, atque vnicum.

[b] 4. sec. Conic.

Etenim demissa ordinata D L, cum hæc asymptoto A I æquidistet, ipsa necessariò Hyperbolen E G secabit, [c] at in vno tantùm puncto, veluti in M, & ob Hyperbolen, erit rectangulum A L M [d] æquale rectangulo A F E, sed est rectangulum A L D maius eodem rectangulo A F E, cum sit *MAXIMVM*, ex hypothesi, ergo idem rectangulum A L D maius erit rectangulo A L M, atq; est A L communis eorum altitudo, quare L D maior erit L M. Hyperbole igitur E G secat omnino D L inter D, & L, vnde & producta necessariò secabit peripheriam arcus D B, cum spatium L D B sit vndique clausum, & Hyperbole sit infinitæ productionis: secet igitur in G. Dico punctum G quæsitum soluere, vt satis patet, cùm rectangulum G H A, ob Hyperbolen, sit [e] æquale rectangulo E F A.



[c] Coroll. 11. primi huius.
[d] 12. sec. Conic.
[e] ibidem.

Quod autem in nullo alio puncto, præter in E, & G, huiusmodi Hyperbole arcui A D, vel arcui D B occurrat, manifestum est: nam si alibi occurreret, vt in N; esset ob Hyperbolen, rectangulum pertingens ad N æquale rectangulo A F E, quod est falsum, quoniam ob circulum, vel Ellipsim, quando punctum N est inter E, & D, rectangulum ad N maius est quàm rectangulum ad E, & si fuerit inter A, & E, ipso rectangulo ad E minus

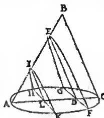
minus est, * prout in præcedenti demonstratum fuit: idemque sequetur, si dicatur Hyperbolen alibi quàm in G arcui D B occurrere. Itaque inuenta sunt in semi-circulo, vel semi-Ellipsi vltrò citròque à *MAXIMO* rectangulo, duo rectangula inter se æqualia. Quod faciendum erat. * 94. h.

PROBL. XIX. PROP. XCVI.

In quocunque Cono terminato, ex infinitis Parabolæ portionibus, quæ à planis inter se æquidistantibus, iuxta quodlibet Coni latus, tanquam regulam ductis, in ipso Cono procreantur, MAXIMAM assignare.

ESto Conus quicunque terminatus A B C, cuius vertex B, basis circulus A C, & quodcunque triangulum per axem ductum sit A B C. Patet, si huiusmodi Conus, & triangulum per axem alio plano secetur, quorum communis sectio D E æquidistet alterutri laterum trianguli per axem, nempe B C, & communis sectio plani secantis per D E cum basi A C, quæ sit F G, sit ad basim A C trianguli per axem perpendicularis, patet inquam sectionem in Cono genitam G E F (quam vocò factam iuxta latus B C, quod communi sectioni E D æquidistat) semper esse [a] quandam Parabolæ portionem: quæritur modò, quæ sit *MAXIMA* harum æquidistantium infinitarum Parabolæ portionum in Cono, iuxta latus B C, tanquam regulam, progenitarum. a 1. primi huius.

Secetur diameter A C in D, ita vt A D sit tripla ad D C, & per D agatur planum iuxta regulam B C, vti dictum est, sectionem faciens Parabolen G E F. Dico hanc esse *MAXIMAM* quæsitam.



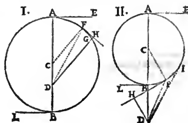
Secto enim Cono, quocunque alio plano iuxta eandem regulam B C, quod sectionem faciat Parabolen H I K, cuius communis sectio cum triangulo per axem sit I L, cum circulo verò sit K L H, erit D E ipsi L I, & F D ipsi K L [b] parallela, quare angulus F D E angulo K L I æqualis [c] erit, vnde, si concipiantur iungi rectæ F E, K I, triangula F D E, K L I cum sint æquiangula ad D, L, habebunt rationem compositam ex latere E D ad I L, siue ex D A ad A L, & ex D F ad L K, sed rectangulum quoque A D F, ad rectangulum A L K habet rationem ex ijsdem rationibus compositam, ergo triangulum E D F ad I L H erit vt rectangulum A D F ad A L K, sed rectangulum A D F maius est ipso A L K, cum sit [d] *MAXIMVM*, ergo & triangulum E D F ipso I L K maius erit, & sumptis duplis [e] superbipartientibus tertijs, erit Parabolæ portio G E F maior Parabolæ portione H I K, & hoc semper, vbicunque æquidistans planum ducatur extra G E F

b 16. vnd. Elem.
c 10. ibid.
d 93 h.
e 17. primi h.

iuxta

Ex centro C ad punctum contactus F ducatur radius CF; patet ipsum cum contingente FH rectum angulum efficere, sed angulus quoque DHF, rectus est ex hypothesi, quare DH ipsi CF est parallela, vnde perpendicularis DH, occurrit tangenti extra punctum contactus F. Iungatur denique DF, &c.

Cum enim ex puncto D in circuli peripheriam cadant rectæ DA, DF, DB, &c. patet, ex elementis, DA, in qua est centrum, *MAXIMAM* esse, nempe maiorem DF, sed est obliqua DF maior perpendiculari DH, ergo DA eò magis maior erit DH. Quod DA quoque sit maior DB, patet cum ipsa sit diametri segmentum, in quo est centrum, & hoc semper ostendetur de quibuslibet alijs perpendicularibus ad contingentes; ergo DA, in qua centrum reperitur, est *MAXIMA* in vtraque figura, etiam si datum punctum cadat in ipsam peripheriam.



In prima verò, iam est DB minor DA; item est DB minor DG, estq; DG minor DH, ergo DB eò ampliùs est minor DH, & hoc semper de qualibet perpendiculari ad quamcunque contingentem, præter ad punctum D; quare, dum datum punctum D cadit intra circulum, *MINIMA* est DB reliquum diametri segmentum, dempta *MAXIMA*.

Si autem datum punctum incidat in ipsam peripheriam, vt in B: patet perpendicularem ex B, super contingentem ex eodem B ductam, punctum euadere, ac propterea non dari *MINIMAM*, nisi dicatur illud idem punctum esse *MINIMAM*.

Si tandem punctum D cadat extra, vt in secunda figura: ducta ex D circulum contingente DI, constat pariter perpendicularem ductam ex D super ipsam DI in punctum abire, ac ideo in hoc etiam casu non dari *MINIMAM*, &c. Quod vltimò probandum erat.

THEO-

THEOR. LXIII. PROP. XCVIII.

Perpendicularium à vertice Coni scaleni super rectas basis peripheriam contingentes ducibilium, MAXIMA est, quæ super contingentē ex termino MAXIMI lateris Coni ducitur, siue est ipsum MAXIMVM Coni latus: & dum vestigium verticis cadit intra basim, vel in ipsius peripheriam, MINIMA est, quæ super contingentem ex termino MINIMI lateris, siue est idem latus MINIMVM: dum autem cadit extra, MINIMA est, quæ cadit super contingentem ductam à puncto vestigij verticis ad eandem basis peripheriam, siue MINIMA est ipsa Coni altitudo.

ESto Conus scalenus A B C, cuius vertex B, basis A C, centrum D, & altitudo B E basi occurrens in puncto E (quod verticis vestigium voco,) quod vel cadat intra basim, vt in prima figura, vel in ipsam peripheriā, vt in secunda, vel extra, vt in tertia, per quām B E, & per centrum D concipiatur ductum planum efficiens in Cono triangulum A B C, quod rectum
a 14. secundi Sereni. erit [a] ad planum circuli A C, eritque triangulum scalenum, cuius maius latus, nempe B A erit [b] *MAXIMVM*, minus verò B C *MINIMVM* laterum,
b 15. ibid. à vertice B ad basis circumferentiam ducibilium.

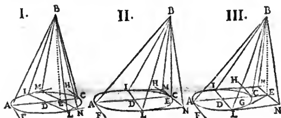
Præterea ex terminis diametri A, C, contingant peripheriam rectæ A F, H C, & ducto per axem quolibet alio plano efficiente triangulum I B L obliquū ad planum basis A C, ex terminis I, L alterius diametri I D L, agantur contingentes I M, L N, & hoc fiat vt contingit, &c. Dico perpendicularium, quæ à vertice B ad ipsas contingentes A F, C H, I M, L N, &c. duci possunt, in sigulis casibus, *MAXIMAM* esse, quæ super A F, atque eam esse ipsum *MAXIMVM* latus B A: in primò autem, & secundò casu *MINIMAM* esse, quæ super C H, atque hanc esse, ipsum *MINIMVM* latus B C: in tertio denique si ex puncto vestigij E ducatur E G peripheriam basis contingens. Dico earundem perpendicularium *MINIMAM* esse, quæ super E G ducitur, & hanc esse ipsam altitudinem B E.

Etenim, in singulis figuris, cum triangulum A B C sit, ex hypothesi rectum ad planum basis A C, & ad communem eorum sectionem A C sit F A perpendicularis (nam est A F contingens circulum, & A D centrum iungens) erit eadem F A recta ad planum A B C, ac propterea recta erit quoque ad A B, quæ est in eodem plano A B C, in quo est A C, hoc est B A perpendicularis erit super contingentem A F; eadem ratione ostendetur B C perpendicularem esse ad contingentem C H.

Præterea ducta ex E recta M E N parallela ad I L, cum anguli D I M, D L N sint recti, à contingentibus cum radijs constituti, erunt quoque reliqui parallelarum interni I M E, L N E recti. Iungantur denique B M, B N. Et cum B E sit recta ad planum basis A C, erit etiam planum trianguli M B N, quod per eam ducitur, rectum [c] ad ipsam basim, siue basis recta ad
c 18. vnd. Elem. triangulum M B N, estque I M perpendicularis ad eorum communem sectionem

ctionem MN, vt modò oftendimus, ergo, & ad rectam MB, quæ eft in eodem trianguli plano perpendicularis erit, fiue BM perpendicularis fuper IM: eodem modo oftendetur BN perpendicularem effe ad LN.

1. IAM perpendicularis BA maior eft BC, cum BA fit *MAXIMVM* Coni latus, & BC *MINIMVM*, vt fupra monuimus; ob eandem rationem eft BA maior BI, fed BI maior eft BM, cum BM fit perpendicularis ad IM, ac ideo *MINIMA* ad ipfam IM, ergo BA eò magis maior erit perpendiculari BM: eodem modo demonftrabitur BA maiorem effe perpendiculari BN, & hoc femper, &c. quare in fingulis cafibus *MAXIMVM* Coni latus BA eft *MAXIMA* prædictarum perpendicularium.



2. QVo autem ad *MINIMAM* in prima figura. Eft BC minor BA, cum ea fit *MINIMVM* Coni latus. Ampliùs eft [a] perpendicularis EC minor perpendiculari EM, vnde, & quadratum EC minus eft quadrato EM, & communi addito quadrato EB, erunt duo fimul quadrata CE, EB, fiue vnicum quadratum BC, minus duobus fimul quadratis ME, EB, fiue vnico quadrato BM (ponitur enim BE recta ad bafim, ac ideo cum omnibus EC, EM, &c. rectos efficit angulos) hoc eft recta BC, quæ perpendicularis eft ad contingentem CH, minor erit recta BM, quæ eft perpendicularis ad contingentem IM; eadem ratione oftendetur BC minorem effe perpendiculari BN, vel quacunque alia ex B ad quamlibet contingentium ducta: quare BC eft ipfarum perpendicularium *MINIMA*. a 97. h.

In fecunda verò cum altitudo BE congruat cum perpendiculari BC ad contingentem CH, cumque eadem BE fit [b] *MINIMA* ad planum bafis AC, erit etiam perpendicularis BC *MINIMA* ad idem planum, hoc eft *MINIMA* quarumlibet perpendicularium. In primo igitur, ac fecundo cafu recta BC, quæ eft *MINIMVM* Coni latus, perpendicularium ad prædictas contingentes eft *MINIMA*. b 52. h.

3. IN tertia denique, cum fit recta BE ad planum bafis perpendicularis, ipfa cum contingente EG rectos efficiet [c] angulos, fed ipfa BE eft [d] *MINIMA* ad ipfum bafis planum, quare, & *MINIMA* quoque erit prædictarum quarumlibet perpendicularium. Quod vltimò oftendere proponebatur. c 3. def. 11 Elem. d 52. h.

COROLL. I.

EX hac igitur constat in Cono scaleno, tum *MAXIMVM*, tum *MINIMVM* latus perpendiculare esse ad rectas ex eorum extremis terminis basis peripheriam contingentes.

Nam superiùs primo loco demonstrauimus rectam B A, quæ est *MAXIMVM* Coni latus, rectum angulum efficere cum contingente A F, & rectam B C, quæ est latus *MINIMVM*, cum contingente C H rectum pariter angulum constituere.

COROLL. II.

PAtet quoque in eodem Cono scaleno, perpendicularem ex vertice ductam super aliam contingentem ad extrema basis cuiuscunque trianguli per axem non recti ad basim Coni, eam esse, quæ iungit eundem verticem cum interfectione ipsius tangentis cum ea recta linea, quæ à vestigio verticis ipsi basi prædicti trianguli per axem æquidistans ducitur.

In triangulo enim I B L per axem ducto, sed super basim A I C L obliquo, ibi demonstratum fuit rectas B M, & B N perpendiculares esse super contingentes I M, & L N, ductas ex terminis I, & L basis I L eiusdem trianguli, atque iam puncta M, & N sunt interfectiones ipsarum tangentium cum recta M E N, quæ per verticis vestigium E æquidistans ducitur ad I L basim trianguli.

THEOR. LXIV. PROP. IC.

In quocunque Cono scaleno, Parabolæ portiones iuxta quælibet Coni latera genitæ, & quarum diametri, in earum triangulis per axem ab iisdem lateribus proportionaliter distent, vel quarum bases sint æquales, habent altitudines proportionales perpendicularibus, quę ducuntur à Coni vertice super rectas basis peripheriam contingentes ad puncta, quibus eadem latera occurrunt.

ESto Conus scalenus A B C, cuius vertex B, basis circulus A C, centrum D, & Coni altitudo sit B E, per quam, & per axim ductum sit planum ad basim erectum, efficiens in Cono triangulum A B C: & iterum sectus sit Conus quocunque alio plano per axem efficiente triangulum super basim obliquum G B H, atque iuxta vtriusque horum triangulorum latera B A, B G tanquam regulas, cōcipiantur duci - plana, parabolicas portiones efficientia, ita vt communis sectio Parabolæ genitæ iuxta latus B A cum triangulo A B C sit recta P I, (quæ in triangulo A B C æquidistabit lateri B A [a] eritque Parabolæ diameter) & cum basi A C sit recta L I M (quæ rectæ A D C erit perpendicularis, atque eiusdem Parabolæ basis) communis autem sectio Parabolæ genitæ iuxta latus B G cum triangulo G B H, sit recta Q S, (quæ parallela erit ipsi B G, ac item erit [b] diameter Parabolæ)

[a] 1. primi huius.

[b] ibidem.

& cum

& cum basi A C erit recta N S O, (quæ ad rectam G D H erit perpendicularis, & ipsius Parabolæ basis) quæ bases inter se æquales erunt, cum sint rectæ in circulo A C à centro D æqualiter distantes, atque huiusmodi Parabolarum diametri P I, Q S proportionaliter distent à lateribus, seu ab ipsarum regulis B A, B G, ita vt sit B P ad P C, vel A I ad I C, vt B Q ad Q H, vel G S ad S H. Dico altitudinem Parabolæ per P I ad altitudinem Parabolæ per Q S (quæ sunt Parabolæ æqualium basium) habere eandem rationem, ac perpendicularis ex vertice B super contingentem ex A, termino lateris B A, ad perpendicularem ex B super contingentem ex G, termino lateris B G. Et è conuerso, &c.

Nam sit A F basim contingens ad A, siue perpendicularis ad diametrum A C, quę erit [a] quoque cum A B perpendicularis: sitque G R contingens ad G, quæ item cum diametro G D H rectos angulos efficiet; atque ex E Coni verticis vestigio, ducatur E R parallela ad H D G, iungaturque B R, quæ super contingentem G R erit [b] perpendicularis, iunctaque H R, quæ rectam G S N secet in T, agatur recta Q T.

[a] 1. Coroll. 98. h.

[b] 2. Coroll. ibid.

Iam cum sit I M parallela ad A F, (vtraque enim perpendicularis est ad A C) & I P ad A B, erit angulus P I M [c] æqualis angulo B A F, nempe rectus, quare ipsa P I erit altitudo Parabolicæ portionis, quæ ducitur per P I iuxta latus B A, cum sit M I L eius basis. Præterea cum sit R H ad H T, vt G H ad H S, (ob parallelas R G, T S in triangulo G H R) vel vt B H ad H Q (ob æquidistantes G B, S Q in triangulo G H B) erit in triangulo R H B recta B R parallela ad Q T, estque R G parallela ad T S, ergo angulus Q T S æquabitur [d] angulo B R G, siue rectus erit, ex quo ipsa Q T erit altitudo Parabolicæ portionis ductæ per Q S iuxta latus B G, cum N S O sit basis ipsius Parabolæ. Et quoniam demonstrata est B R parallela ad Q T, erit B R ad Q T, vt B H ad H Q in triangulo B H R, vel vt B C ad C P, ex hypothesi, vel vt B A ad P I, ob parallelas in triangulo A B C, & permutando B R, quæ est perpendicularis ex vertice B super contingentem G R, ad B A, quæ est perpendicularis ex B super contingentem A F, ita Q T, quæ est altitudo Parabolæ per Q S, ad P I, quæ est altitudo Parabolæ per P I, & hoc semper; quare patet propositum.

[c] 10. vnd. Elem.

[d] ibidem.

COROLL.

Hinc est, quod Parabolarum in Cono genitarum, iuxta quodlibet latus trianguli per axem ad basem recti, eędē sunt diametri, ac altitudines. Superiùs enim ostendimus diametrum Parabolæ per P I in triangulo per axem A B C iuxta latus B A, esse quoque altitudinem eiusdem Parabolæ.

PROBL. XX. PROP. C.

In dato quocunque Cono ſcaleno, MAXIMAM MAXIMARVM, & MAXIMARVM MINIMAM Parabolæ portionem aſſignare.

ESto Conus ſcalenus A B C, cuius vertex B, baſis B C, centrum D. Oportet inter *MAXIMAS* Parabolas, & *MAXIMAM*, & *MINIMAM* aſſignare.

Secetur Conus plano per axem, & ad baſim erecto, efficiente triangulum A B C. Patet alterum ipſius laterum, vt puta B A eſſe [a] *MAXIMVM*, alterum verò B C *MINIMVM*.

a 15. sec. Sereni.

Radius D A ad partes *MAXIMI* lateris ſecetur bifariam in E, ita vt C E ſit tripla ad E A; & per E iuxta regulam *MAXIMI* lateris B A concipiatur ductum planum efficiens Parabolen: patet hanc eſſe [b] *MAXIMAM* iuxta idem latus B A, quam dico eſſe quoque *MAXIMARVM MAXIMAM*, vbicunque cadat punctum H veſtigium verticis.

b 96. h.

Nam *MAXIMA* Parabole, ducta per E iuxta latus B A, ad quamlibet aliam *MAXIMAM* Parabolen iuxta aliud quodcunque latus, nempe iuxta B F (cum ipſæ ſint [c] æqualium baſium) eſt homologè, vt altitudo [d] vnius ad altitudinem alterius, ſed altitudo ad altitudinem eſt vt [e] perpendicularis ex B ſuper contingentem circuli B C peripheriam ad punctum A, [f] quæ eſt ipſum latus B A, ad perpendicularem ex B ſuper contingentem ad punctum F, atque perpendicularis B A maior eſt perpendiculari ex B ſuper contingentem ad F, cum ipſa B A ſit [g] earundem perpendicularium *MAXIMA*, ergo, & *MAXIMA* Parabole ducta per E iuxta latus B A erit maior *MAXIMA* Parabola ducta iuxta latus B F, & hoc ſemper, vnde ipſa ducta per E iuxta *MAXIMVM* Coni latus B A, erit *MAXIMARVM MAXIMA*: quod primò erat, &c.

c Coroll. 96. h.
d 15. primi h.
e 99. h.
f 1. Coroll. 98. h.
g 98. h. ad num. 1.

Præterea ſi H veſtigium verticis B ceciderit, vel intra circulum B C, vel in ipſius peripheriã: ſecto radio D C, (qui eſt ad partem *MINIMI* lateris B C Coni A B C) bifariam in G, & per ipſum ducto plano iuxta regulam lateris B C efficiente *MAXIMA* [b] Parabola. Dico hanc eſſe *MAXIMARVM*, *MINIMAM* quæſitam.

b 96. h.

Etenim *MAXIMA* Parabole per G iuxta latus B C, ad quamcumque aliam *MAXIMAM* iuxta quodcunque aliud latus B F, eſt homologè [i] vt altitudo vnius ad altitudinem alterius, cum ipſæ ſint [l] æqualium baſium; ſed altitudo ad altitudinem eſt vt [m] perpendicularis, ex B ſuper contingentem ad C, quæ [n] eſt ipſum *MINIMVM* latus B C, ad perpendicularem ex B ſuper contingentem ad F, & per-

i 15. primi huius.
l Coroll. 96. h.
m 99. h.
n 1. Coroll. 98. h.

& perpendicularis B C minor eſt perpendiculari ex B ſuper contingentem ad F, cum ea B C ſit ipſarum perpendicularium [a] *MINIMA*, ergo, & *MAXIMA* Parabole per G ducta iuxta Coni latus B C, erit minor *MAXIMA* Parabola genita iuxta latus B F, & hoc ſemper; quapropter ipſa *MAXIMA* Parabole, ducta per G iuxta *MINIMVM* Coni latus B C, in his caſibus, erit *MAXIMARVM MINIMA*. Quod ſecundò erat, &c.

Si tandem veſtigium verticis H ceciderit extra baſim Coni, vti apparet in hac figura. Ducta contingente H I, atque iuncta B I, ſi radius D I bifariam ſecetur in puncto L, per quod iuxta latus B I ducatur planum Parabolen efficiens, quæ erit *MAXIMA*. Dico hanc eſſe *MAXIMARVM MINIMAM*.

Quoniam *MAXIMA* per L iuxta latus B I ad *MAXIMAM* iuxta aliud quodcunque latus B F, eſt vt [b] altitudo ad altitudinem, cum ipſæ Parabolæ ſint [c] æqualium baſium, ſed altitudo ad altitudinem eſt vt [d] perpendicularis ex B ſuper contingentem ad I, quæ eſt ipſa B H Coni altitudo (quæ ad omnes rectas in plano baſis Coni ad punctum H pertingentes eſt [e] perpendicularis) ad perpendicularem ex B ſuper contingentem ad F, & perpendicularis B H minor eſt perpendiculari ex B ſuper contingentem ad F, cum ipſa ſit [f] huiuſmodi perpendicularium *MINIMA*, quare, & *MAXIMA* Parabole iuxta latus B I, iungens Coni verticem, & contactum rectæ lineæ H I, quæ à veſtigio H ad peripheriam baſis ducitur, minor erit *MAXIMA* Parabola iuxta latus B F, & hoc ſemper, vnde ipſa *MAXIMA* Parabole per L iuxta latus B I, erit, in hoc caſu, *MAXIMARVM MINIMA*. Quod vltimò faciendum erat, quodque eſto DIVINATIONIS, ac

a 98. h. ad num. 2.

b 15. primi h.

c Coroll. 96. h.

d 99. h.

e ex def. 3. vnd. Ele.

f 98. h. ad num. 3.

LIBRI SECVNDI FINIS.

ADDENDA LIB. II.

Pag. 53. Coroll. I. ita restituendum.

HInc est, quod applicatæ ex terminis equalium diametrorum in Parabola, vel (in reliquis sectionibus) ex punctis proportionaliter diuidentibus semi-diametros ad quemlibet angulum constitutas; nempe quod bases equalium portionum de eadem coni-sectione, vel circulo, omnino se mutuò secant inter diametros; & quod rectæ lineæ, tum harum applicatarum, vel basium portionum puncta media, tum extrema iungentes, rectæ semidiametrorum terminos iungenti æquidistant.

Demonstratum est enim rectas HI, EC, quæ sunt bases æqualiū portionum HEI, ABC, secare se mutuò in M inter diametros ED, BD; & iunctas HC, GF, AI ipsi EB esse parallelas.

Pag. 59. post Coroll. adde sequens

SCHOLIVM.

QVod in Ellipsi demonstratum fuit de portionibus ABC, HMI, semi-Ellipsi minoribus, idem sequitur de maioribus AHC, HCI, quarum bases AC, HI similem concentricam interiorem Ellipsim contingunt; nempe has quoque inter se æquales esse. Nam ipsæ portiones AHC, HCI sunt partes superstites de eadem Ellipsi ABCH, demptis æqualibus portionibus ABC, HMI.

Pag. 61. post Coroll. II.

COROLL. III.

PAtet denique in Parabolis parallelis, vel in similibus concentricis Hyperbolis, aut Ellipsibus, vel Circulis ABC, DEF, omnia rectangula sub segmentis applicatarum, inter se, & prædictæ contingenti AEC æquidistantium (quorum vnum est rectangulum GDH, vel GFH) esse inter se æqualia; cum quodlibet ipsorum æquale sit eidem quadrato semitangentis AE.



VINCENTII VIVIANI
AD LIB. DE MAX. ET MIN.
APPENDIX.



MONITVM.



ACTENVS habes Amice Lector plurima eorum, quæ iamdiu occasione Diuinationis in V. Concor. excogitauimus, dum ex tribus illis fasciculis SERENISS. LEOPOLDI inuicto testimonio comprobatis, de quibus latiùs in Proæmio, priorem exinaniuimus, alterum extenuauimus. Ex eorum reliquijs tertium saltem librum efformare statueramus, circa MAXIMAS pariter, ac MINIMAS magnitudines versantem, atque ampliùs illas eiusdem nominis, quæ à MAXIMIS, & MINIMIS plus minusue recedunt excutientem; quod rarò hucusque, ac tantùm necessitate cogente demonstrauimus, quodque de industria omisimus, tum ne à suscepta materia longius discederemus, tum vt ipsam expeditius persolueremus. Verùm graues, ac diuturnæ egritudines, quæ nos, huic editioni incumbentes, exagitarunt, ita ipsimet remoram fecere, totque è contra sunt stimuli ad hoc in vulgus manandum, vt cætera ad aliud tempus proferre cogamur, si hæc tibi grata comperiamus. Liceat tamen ex tertio libro quasdam Propositiones aliunde receptas desumere, atque Appendicis nomine huc apponere, ad id præsertim impulsi, tum quod nostræ harum Propositionum demonstrationes huic tertio libro sint penitus inutiles, tum quia pollicitam quorundam fidem, solidam, incorruptamque prorsus non inuenerimus.

Duo potissimùm sunt Problemata, quibus hæc Appendicula constatur.

Primum (vti constat ex quadam variarum Propositionum narratione, quæ inter summum Geometram Torricellium, præstantioresque Galliæ, ne

liæ, ne dicam Europæ Mathematicos intercessere, quales, inter hos D. Fermat Senator Tholosanus, D. Roberuallius in Parisiensi Academia Regius Mathematum Professor, ac D. de Verdus) præfatus Cl. Vir de Fermat ipsi Torricellio olim proposuerat, qui licet statim in ipsius solutionem non incidisset, inde mox animaduertens Problema determinatum esse, illud demum triplici via, altera nimirum per locos planos, reliquis per solidos demonstrauit, nobisque postmodum exercitationis gratia in hunc, qui sequitur modum enodandum tradidit.

Dato triangulo, cuius vnusquisq; angulorum minor sit graduum 120. punctum reperire, à quo si ad angulos tres rectæ educantur ipsarum aggregatum sit MINIMVM.

Quod, vt vera fatear, non nisi iteratis oppugnationibus tunc nobis vincere datum fuit, sed aggressione omnino ab alijs discrepante, ac, ni decipimur, satis iucunda, & ad ipsiusmet Problematis propagationem valde accommoda, dum non tantum ad tria data puncta, (qualia sunt vertices angulorum propositi trianguli) verùm etiam ad quotquot libuerit, ex alio quæsito puncto, MINIMVM eductarum aggregatum reperiri queat, manente tamen determinata eorum positione, prout determinatum est prædictum triangulum.

Alterum Problema præclarissimum Virum, & Auorum splendore, & morum integritate conspicuum agnoscit Auctorem: P. Honoratum Fabbri, natione Gallum, in Iesuitarum celeberrima Societate magni nominis Theologum, omnigena historiarum, humaniorumque literarum eruditione decoratum, Mathematicum præstantissimum, Philosophum acutissimum, qui olim Lugduni apud Gallos Philosophiam publicè edocens, summam egregij acuminis famam sibi peperit, quod manifestò testantur (ita nobis afferente alibi iam, sed parum commendato nobilissimo Adolescente Laurentio Magalotti tanti Viri amantissimo, & obsequentissimo) quædam ipsius PROPOSITIONES PHYSICAE, CVM BREVISSIMIS RATIONVM MOMENTIS, tunc ibidem publici iuris factæ, & prout fusius, Deo dante, patebit ex nouis eiusdem geometricis, ac physicomathematicis contemplationibus, quibus Literatorum Respublica aliquando se locupletaturam expectat.

Hoc igitur Problema, anno 1656. idem Cl. Adolescens Laurentius Magalotti, (dum in Pisano Lyceo Iurisprudentiam excoleret) à prædicto P. Fabbri, tunc Romæ immorante receperat, nobisque per epistolam, Pisis, sub 27. Decembris datam communicarat, cui post triduum rescribentes, vniuersaliorem quæsiti propositionem, ita exposuimus;

Dua-

Duabus datis rectis lineis terminatis, non modò ad rectum, sed ad quemlibet angulum constitutis, & per vnius ipsarum terminum alia alteri ipsarum æquidistanter ducta, ad contrarias tamen partes, & in infinitum producta: oportet per extremum terminum alterius, rectam ducere æquidistanti occurrentem, quæ cum bina similia triangula ad verticem constituat, ipsorum aggregatum sit MINIMA quantitas.

simulque nostram Problematis enodationem his verbis enunciauimus;

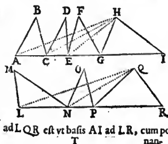
Diuidatur secanda linea, ita vt segmentum ipsius propè terminatam parallelam, ad segmentum reliquum sit in ratione diametri cuiuslibet quadrati ad excessum diametri super latus: nam pũctum interfectionis erit quæsitum.

ac demum de inuentione binorum æqualium ex triangulis aggregatorum, tam supra, quàm infra punctum MINIMI aggregati eundem Cl. Adolescentem commonefecimus. Sed iam Appendicem aggrediamur.

LEMMA I. PROP. I.

Si fuerint duo ordines quotcunque triangulorum æqualem altitudinem habentium; erit aggregatum basium triangulorum primi ordinis, ad aggregatum basium triangulorum secundi, vt aggregatum triangulorum primi, ad aggregatum triangulorum secundi ordinis.

SIt vnus ordo trlangulorum ABC, CDE, EFG, GHI, alter verò triangulorum ordo LMN, NOP, PQR, & omnia sint æqualis altitudinis, vtriusque autem ordinis triangula sint ad easdem partes, & ipsorum bases in directum dispõnãtur, quarum basium aggregatum, in primo sit AI, & in secundo sit LR. Dico aggregatum AI, ad aggregatum LR esse vt aggregatum triangulorum primi ordinis ad aggregatum triangulorũ secũdi.



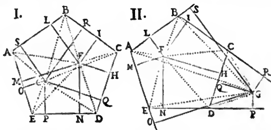
Quoniam iunctis rectis AH, CH, EH; & LQ, NQ: erit triangulum ABC æquale triangulo AHC, (cum sint super eadem basi AC, & habeant ex hypothesi eandem altitudinem) & CDE æquale CHE, ac EFG æquale EHG; vnde communi addito GHI, erunt omnia simul primi ordinis æqualia vnico AHI: item ostẽdetur omnia simul secundi ordinis æqualia esse vnico LQR; sed triangulum AHI ad LQR est vt basis AI ad LR, cum po-

nantur æqualium altitudinum, quare aggregatum triangulorum primi, ad aggregatum triangulorum secundi ordinis erit, vt A I ad L R, vel vt aggregatum basium primi ordinis ad aggregatum basium secundi. Quod erat, &c.

LEMMA II. PROP. II.

In quocunque polygono regulari, aggregata perpendicularium ex quibuscunque punctis, (quæ tamen non sint extra perimetrum polygoni) super omnia eius latera eductarum, inter se sunt æqualia. Si verò alterum punctorum fuerit extra perimetrum, aggregatum perpendicularium ex eo eductarum, maius semper erit quolibet prædictorum aggregatorum ex puncto, quod non sit extra.

ESto polygonum regulare A B C D E, & duo quælibet puncta F, G, in prima figura, vel intra, vel in ipsius perimetro, à quibus super eius latera eductæ sint perpendiculares F N, F H, F I, F L, F M; & G O, G P, G Q, G R, G S. Dico talium perpendicularium aggregata inter se æqualia esse. Si verò alterum punctorum G, cadat extra, vt in secunda figura, dico aggregatum perpendicularium ex G maius esse quolibet prædictorum aggregatorum, vt puta perpendicularium ex F.



Ductis enim rectis ex G, F ad omnes angulos polygoni, vt in figuris: Patet ipsum polygonum vtrinque diuisum esse in duos triangulorum ordines æquales altitudines habentium, quæ sunt ipsa polygoni latera, super quæ cadunt perpendiculares, (si nempe hæ accipiantur tanquam bases) erit ergo aggregatum basium triangulorum, quæ simul conueniunt in F, ad aggregatum basium triangulorum, quæ conueniunt in G, * vt aggregatum triangulorum primi ordinis ex F, ad aggregatum triangulorum secundi ex G, sed hęc triangulorum aggregata in prima figura sunt æqualia (nam ipsa idem polygonum compleat) ergo, & aggregata basium eorundem, hoc est aggregata perpendicularium ex F, & G, super polygoni latera eductarum, sunt

* per primum Append.

ſunt æqualia. In ſecunda verò figura, aggregatum triangulorum ex G maius eſt aggregato triangulorum ex F, vt ſatis patet (cum illud, ipſum polygonum excedat) quare, & aggregatum baſium triangulorum ex G, (quæ ſunt ipſæ perpendiculares ex G) maius eſt aggregato baſium triangulorum ex F, (quæ ſunt perpendiculares ex F.) Quapropter, &c. Quod erat, &c.

COROLL.

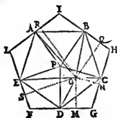
HInc eſt, quod aggregatum perpendicularium ex centro dati polygoni ſuper eius latera eductarum, ſemper eſt non maius quolibet ex alio puncto perpendicularium aggregato, vbicunque aſſumptum ſit punctum hoc, vel intra, vel in perimetro, vel extra perimetrum dati polygoni.

THEOR. I. PROP. III.

In quocunque polygono regulari, aggregatorum linearum ex punctis vbicunque aſſumptis ad ipſius angulos eductarum, MINIMVM eſt, quod ex centro.

SIt polygonum regulare A B C D E, cuius centrum P, à quo ad angulos eductæ ſint rectę P A, P B, P C, P D, P E, ſumptoq; vbicunque alio puncto O, vel intra polygonum A B C D E, vel in eius perimetro, vel extra, iungantur item O A, O B, O C, O D, O E. Dico aggregatum eductarum ex centro P, minus eſſe aggregato ductarum ex O.

Ex punctis enim A, B, C, D, E, erigantur ipſis P A, P B, P C, P D, P E perpendiculares L I, I H, H G, G F, F L vtrinq; productæ. Patet has ſimul conuenire, & polygonum L I H G F dato ſimile conſtituere circa idem centrum P, ad cuius latera ex puncto O ducantur perpendiculares O R, O Q, O N, O M, O S.



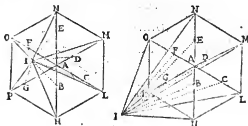
Iam per Coroll. præcedentis Lemmatis in polygono I H G F L aggregatum perpendicularium, quæ ex centro P eſt non maius aggregato perpendicularium, quæ ex puncto O vbicunq; aſſumpto, ſed aggregatum perpendicularium ex O, minus eſt aggregato obliquarum O A, O B, O C, O D, O E, ſuper iiſdem lateribus circumſcripti polygoni eductarum, (eſt enim perpendicularis O R, minor obliqua O A, & O Q minor O B; O N minor O C; O M minor O D, & O S minor O E) ergo aggregatum perpendicularium ex P, hoc eſt ad angulos dati polygoni A B C D E eductarum, eſt omnino minus aggregato obliquarum ex O, nempe eductarum ad eoſdem angulos dati polygoni à puncto O, vbicunque ſit ipſum O. Quare aggregatum ductarum ex centro ad angulos polygoni regularis *MINIMVM* eſt. Quod erat, &c.

THEOR. II. PROP. IV.

Si quotcunque rectæ lineæ terminatæ (non minus verò quam tres) cuiuslibet longitudinis, ad vnum idemque punctum occurrant, totidem angulos inter se æquales constituentes, & quatuor rectos complentes. Erit aggregatum harum simul omnium occurrentium, MINIMVM aggregatorum rectarum, à quibuscunque alijs assumptis punctis, ad eosdem datarum terminos eductarum.

Sint quotcunque rectę AB, AC, AD, AE, AF, AG terminatę, quę ad punctum A simul occurrant, constituantque angulos BAC, CAD, DAE, EAF, FAG, GAB inter se æquales, & simul sumpti ęquales quatuor rectis: dico aggregatum harum omniũ minus esse aggregato linearum, quæ ex quolibet alio puncto I ad eosdem terminos B, C, D, E, F, G, educi possunt, quales sunt IB, IC, ID, IE, IF, IG.

Sit enim AG *MAXIMA* ductarum ex A, super qua sumatur AP ipsa AG non minor, cui demantur æquales AH, AL, AM, AN, AO, & compleatur polygonum HLMNOP, quod erit æquilaterum, & æquiangulũ, siue regulare, cum anguli ad A sint æquales, eiusque centrum erit A; denique iungantur IH, IL, IM, IN, IO, IP.



Iam aggregatum ductarum AH, AL, AM, AN, AO, AP ex centro A ad angulos polygoni, cum sit * *MINIMVM*, erit minus aggregato ductarum IH, IL, IM, IN, IO, IP ex puncto I, sed harum aggregatum minus est aggregato binarum IB, BH; IC, CL; ID, DM; IE, EN; IF, FO; IG, GP; nam IB, BH maiores sunt IH, & IC, CL maiores IL, &c. quare eò magis aggregatum, ex A ductarum, AH, AL, AM, AN, AO, AP minus erit aggregato binarum IB, BH; IC, CL; ID, DM; IE, EN; IF, FO; IG, GP; demptis ergo communibus segmentis BH, CL, DM, EN, FO, GP, erit reliquum aggregatum datarum AB, AC, AD, AE, AF, AG minus reliquo aggregato ductarum IB, IC, ID,

* per 3. Append.

ID, IE, IF, IG ex assumpto puncto I ad datarum terminos B, C, D, E, F, G; itaque aggregatum ductarum ex A æquales angulos inter se efficientes, ~~& quatuor~~ rectos simul ~~complentes~~ est *MINIMVM*. Quod erat, &c.

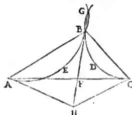
Hinc solutio Gallici Problematis, sequenti Lemmate præostenso.

LEMMA III. PROP. V.

Si in triangulo ABC fuerit angulus ABC, minor grad. 120. & super latera BA, BC describantur ad partes basis AC similes circuli portiones AEB, CDB capientes angulos graduum 120. Dico ipsarum peripherias se mutuò secare, atque omnino intra triangulum ABC.

NOn enim se contingunt in B: quoniam ducta ex B recta FBG vnam harum portionum peripheriam contingente, ipsa, & alteram quoque continget: quare angulus GBA à contingente, & secante confectus æqualis erit ei, qui fit in alterna portione AEB, nempe erit gr. 120. & ob eandem rationem angulus GBC erit grad. 120. vnde reliquus ABC, è quatuor rectis, erit pariter gr. 120. quod est contra hypothesim, cum sit minor.

Nec autem se secant extra triangulum ad partes G, vt in G: nam ducta GB, esset angulus GBA minor eo, qui fit à contingente ex B cũ secante BA, siue minor facto in alterna portione AEB, qui est grad. 120. itemque GBC minor esset gr. 120. quare reliquus ABC è grad. 360. maior esset omnino 120. quod item est contra hypothesim, cum sit minor; quapropter huiusmodi peripherias se mutuò secare infra B ad partes basis AC necesse est.



Verùm ipsarum intersectio haud fiet in basi AC, nec infra, quoniam si in ipsa basi AC, vt in F, esset, ex constructione, angulus AFB grad. 120. siue maior recto, & CFB pariter maior recto; ex quo duo simul AFB, CFB essent duobus rectis maiores; quod est absurdum, cum duos rectos adæquent.

Si tandem eædem peripheriæ se mutuò secarent infra basim AC, vt in H; iunctis AH, CH, essent pariter, ex constructione, duo simul anguli AHB, CHB, siue vnicus AHC maior duobus rectis; quod est falsum cum ipse à duobus rectis deficiat per aggregatum duorum angulorum ACH, CAH. Quamobrem huiusmodi similium portionum peripheriç necessariò se mutuò secabunt, atque intra triangulum ABC. Quod demonstrandum erat.

PROBL. I. PROP. VI.

Dato triangulo, cuius vnusquisq; angulorum minor sit gr. 120. punctum reperire, à quo si ad angulos tres rectę educantur, ipsarum aggregatum sit MINIMVM.

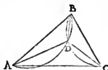
ESto triangulum A B C vt ponitur, & inuenire oporteat punctum quale imperatum est.

Super latera B A, B C ad partes basis A C describantur circuli portiones A D B, C D B capientes angulos grad. 120. siue æquales externo cuiuslibet trianguli æquilateri, quarum portionum arcus omnino se mutuò * secabunt intra triangulum A B C, sitque eorum intersectio punctum D. Dico ipsum esse quæsitum.

*5. App.

Nam iunctis D A, D B, D C, erunt anguli A D B, C D B graduum 120. vnde reliquus A D C, vsque ad quatuor rectorum cõplementum item erit gr. 120. Cum ergo tres rectę D A, D B, D C ad punctum D coeuntes tres æquales angulos efficiant, ~~cumque hi simul sumpti æquales sint quatuor rectis~~, erit ipsarum D A, D B, D C aggregatum *MINIMA* * quantitas. Quare inuentum est punctum D, vti quærebatur. Quod faciendum erat.

*4. App.



PROBL. II. PROP. VII.

Datam rectam lineam terminatam ita diuidere, vt sumpta partium ipsius tertia proportionali, aggregatum extremarum sit MINIMA quantitas.

ESto data linea A B, quam secare oporteat, vt imperatum est.

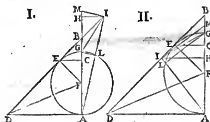
Erigatur ex A ipsi A B perpendicularis, & æqualis A D, iunctaq; D B secetur D E æqualis D A, & ex E super A B perpendicularis demittatur E C. Dico punctum C quæsitum soluere.

Nam bifariam secto angulo A D E per rectam D F secante A B in F, & iuncta F E: cum sit latus D A æquale D E, & D F commune, & anguli A D F, E D F æquales, erunt bases F A, F E æquales, & reliquus angulus F E D reliquo F A D æqualis siue rectus: quare si cum centro F interuallo F A circulus describatur A E G, is transibit quoque per E, & vtramque D A, D B continget in A, E.

Iam cum in semi-circulo sit A C ad C E, vt C E ad C G, sitque C B æqualis C E (cum etiam A D sit æqualis A B) erit A C ad C B, vt C B ad C G. Vnde aggregatum extremarum post segmenta A C, C B erit A G; quod esse *MINIMVM* sic demonstrabitur.

Sum-

Sumpto enim in data recta A B quocunque alio puncto H, vel in ipsius parte producta vltra B, vt in prima figura, vel in ipsa A B, vt in secunda, & ex H ducta H I perpendiculari ad A B, secante diagonalem D B in I, ductaque A I secante circuli peripheriam in L, iunctisque G L, G I: erit angulus A L G rectus, atque externus trianguli L I G; quare internus L I G acutus erit, ac ideo recta I M, quæ ex I erigitur perpendicularis ad I A, hoc est, quæ ipsi L G æquidistat, secabit A B vltra punctum G, vt in M, ac ideo erit A G minor A M. Et cum in triangulo rectangulo A I M, sit vt A H ad H I, ita H I ad H M, sitque H I æqualis H B, erit A H ad H B, vt H B ad H M, ergo A M est aggregatum extremarum proportionalium post partes A H, H B, sed est A G minor A M, vt modò ostendimus: ergo aggregatum A G minus est aggregato A M: & hoc semper vbicunque assumptum fuerit punctum H extra C: ergo aggregatum A G minus est aggregato A M: & hoc semper vbicunque assumptum fuerit punctum H extra C: quare A G est *MINIMVM* aggregatum quæsitum; & recta A B secta est in C, vt imperatum fuit. Quod faciendum erat.



SCHOLIVM.

SI quæratur iuxta quam rationem repertum punctum C diuidat datam A B; id ex ipsa Theorematis constructione elicietur. Nam cum triangula D A B, B E F sint similia inter se, erit B D ad D A, siue diameter quadrati ad latus, vt B F ad F E, vel ad F A, & cum sit B C ad C E, vt C E ad C F, sitque B C æqualis C E (cum & B A æqualis sit A D) erit etiam C E siue C B æqualis C F. Quare si data recta B A diuidatur, ita vt pars B F ad reliquam partem F A, sit vt diameter cuiusdam quadrati ad eius latus, & maior pars B F secetur bifariam in C, hoc ipsum punctum erit quæsitum.

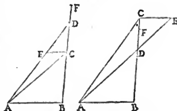
Vel. Cum rectæ A B, A D sint æquales, & perpendiculariter constitutæ, erit A D, siue D E latus quadrati, & D B diameter, & E B excessus diametri super latus, sed est A C ad C B, vt D E ad E B: ergo quæsitum punctum C secat datam rectam A B, ita vt maior pars A C ad minorem C B, sit vt latus cuiusdam quadrati ad excessum diametri super latus, quæ ratio, vt iam constat, cadit inter terminos incommensurabiles.

LEM-

LEMMA IV. PROP. VIII.

Si in triangulo ABC, cuius basis AB, ex vertice C ducta sit CE ipsi BA parallela, vel ad easdem, vel ad oppositas partes, & ducatur quælibet ADE vtranque BC, CE secans in D, & E: dico aggregatum triangulorum ADB, DCE ad triangulum ACB esse vt aggregatum extremarum post BD, DC, ad BC.

SVmatur DF tertia proportionalis post BD, DC. Iam triangulum DCE ad ADC est vt ED ad DA, vel vt CD ad DB, vel vt DF ad DC; & triangulum ADC ad triangulum ABC, est vt DC ad CB, ergo ex æquali triãgulum DCE ad ABC, erit vt DF ad CB; sed triangulum ADB ad idem ABC est vt BD ad BC, quare duo simul triangula DCE, ADB, ad triangulum ACB, erunt vt duæ simul lineæ DF, DB, hoc est tota BF, aggregatum extremarum post BD, DC, ad BC. Quod erat, &c.



PROBL. III. PROP. IX.

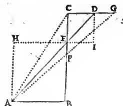
Duabus datis rectis lineis terminatis ad quemlibet angulum constitutis, & per vnius ipsarum terminum alia alteri datarum æquidistanter ducta, ad contrarias tamen partes, & in infinitum producta: oportet per extremum terminum alterius, rectam ducere æquidistanti occurrentem, ita vt, cum ipsa bina similia triangula ad verticem constituat, horũ aggregatum sit MINIMA quantitas.

SInt AB, BC rectæ lineæ terminatæ ad quemcunque angulum ABC compositæ, sitque CD in infinitum producta ipsi BA parallela, sed ad oppositas partes rectæ CB: oportet ex A rectam ducere, qualis est AD, ita vt aggregatum similium triangulorum AEB, CED ad verticem E sit *MINIMVM*.

Diuidatur BC in E, ita vt BE ad EC sit vt latus cuiusdam quadrati ad excessum diametri super latus: dico punctum E esse quæsitum.

Nam ducta qualibet alia AFG; iunctaque AC: cum aggregatum extremarum proportionalium post BE, EC sit *MINIMVM* (per Scholium prop.

prop.7. huius) ipsum erit minus aggregato extremarum post BF, FC; quare primum aggregatum, ad rectam BC minorem habebit rationem, quam secundum aggregatum ad eandem BC, sed primum ad BC est * vt aggregatum triangulorum AEB, DEC ad triangulum ACB, & secundum ad eandem BC est vt aggregatum triangulorum AFB, GFC ad idem triangulum ACB, quare aggregatum AEB, DEC ad triangulum ACB minorem habebit rationem quàm aggregatum AFB, GFC ad idem triangulum ACB, vnde aggregatum ex AEB, DEC minus erit aggregato ex AFB, GFC, ac propterea aggregatum triangulorum ad punctum E erit *MINIMVM*. Quod faciendum erat. * 8. App.

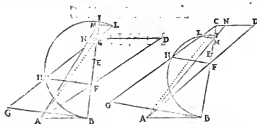


COROLL.

Hinc, cum sit vt subduplum ad subduplum, ita duplum ad duplum, si compleantur parallelogramma BH, CI, ipsorum aggregatum erit *MINIMVM*, &c.

PROBL. IV. PROP. X.

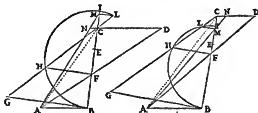
Iisdem positis, ac in præcedenti. Si datum sit in linea BC, quodlibet aliud punctum F inter inuentum punctum E, & extremum B, & oporteat aliud in ipsa punctum assignare, quæ simul exhibeant aggregata triangulorum ad verticem inter se æqualia.



Erigatur BG perpendicularis, & æqualis ipsi BC, iungatur GC, & per F agatur FH æquidistans BG, & fiat vt BF ad FH, ita FH ad aliam FI, & circa diametrum BI circulus describatur rectam GC secans in H, & L, & ex L ducatur LM parallela ad GB; dico punctum M esse quæsitum, hoc est si producantur AF, AM rectam CD secantes in D, & N;

& N; aggregatum triangulorum A F B, D F C, æquale esse aggregato triangulorum A M B, N M C.

Quoniam cum sit vt B F ad F H, ita F H, vel F C ad F I, erit B I aggregatum extremarum B F, F I, post B F, F C. Item cum sit B M ad M L, vt M L, vel M C ad M I, erit idem B I aggregatum extremarum B M, M I, post B M, M C; sed aggregatum triangulorum ad F ad triangulum A B C



*8. App. (iuncta A C) est * vt aggregatum extremarum post B F, F C ad B C, & aggregatum triangulorum ad M ad idem triangulum A B C est vt aggregatum extremarum post B M, M C ad eandem B C, suntque prædicta extremarum aggregata inter se æqualia, cum vtrinque conficiant eandem B I, quare, & aggregatum triangulorum A F B, D F C, æquale erit aggregato triangulorum A M B, N M C. Quod faciendum erat.

APPENDICIS

FINIS.

E *Er*
n
exc
ad le
praef
rehn

Pag.
v.14. &
ADC |
à quad
bolen H
tio - a.
p.57.v.
v.43. G
v.35. M
p.74.v.
v. 35.
asymp
sit - Ian
tunc -
concep
E conc
v.22.
v.29.
metro
BH - se
D, & c
in porti
scripti |
le recta
bit sibi -
ad BF,
aequali
LCN |
maiora
cum LH
pertine
si - cad

Pag.
est | p
ducibil
vertice
Quod
v.43.
cibiliu
maior
quadr
OP |
p.53.
v.9. c
p.62.
perb
ueni
pter
tere
C,
DE
rum

Imprimatur ſeruatis ſeruandis 18. Martij 1658.

Vinc. de Bardis Vic. Gen. Florentiæ.

Excellentiſsimus Dominus Auguſtinus Coltellinus Aduocatus, & S. Officij Conſultor, videat hoc Opus inſcriptum DE MAXIMIS, & MINIMIS, &c. & referat, die 9. Aprilis 1659.

F. Gabriel Pierotius Florentinus S. Officij Flor. Cancell. &c.

Sic diuinare licet Reuerendiſs. Pater, nec malè de arte ſua audiet Mathematicus, dum per retortos linearum tramites itur ad rectam geometricæ veritatis; bonis interim lætantibus, cum nihil obliquum ab orthodoxa fide inueniatur S. R. E. inuiſum, prout refero. Die xvj. April. MDCLIX.

Auguſtinus Coltellini manu propria.

Stante prędicta atteſtatione imprimatur. Hac die 19. April. 1659.

F. Gabriel Pierotius S. Officij Flor. Cancell. de mandato.

Alexander Victorius Sereniſs. Magni Ducis Auditor.